Jeux d'inondation dans les graphes

Aurélie LAGOUTTE

Soutenance de stage de L3
31 août 2010

Contexte géographique et humain

Cadre de travail

Institut des Systèmes Complexes, Equipe MC2
Laboratoire d'Informatique du Parrallélisme, ENS Lyon.
Stage encadré par Eric THIERRY
Travail effectué en collaboration avec Mathilde NOUAL

Contexte scientifique

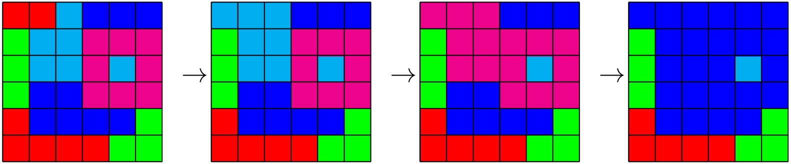
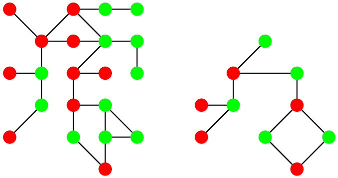


Figure: Séquence d'inondations bleu clair-rose-bleu foncé pour le jeu Flood-It.

- **Etat de l'art :** la recherche de la plus petite séquence pour inonder entièrement un plateau contenant au moins 3 couleurs est NP-dure. La version décisionnelle est NP-complète. [5]
- **Problème ouvert :** Complexité de la variante Free-Flood-It pour 2 couleurs.
- **Buts du stage :**
  - Généraliser le problème à un graphe quelconque
  - Étudier la complexité dans le cas d'autres graphes particuliers (arbres, cycles...)
  - Résoudre le problème ouvert

Graphe réduit



(a) G (b) G^{Red}

Figure: Un graphe muni d'une 2-coloration et son graphe réduit.

Graphe réduit (se calcule en temps linéaire)

- Zones de G $\leftrightarrow$ Sommets de G^{Red}
- Arêtes entre deux sommets de G n'appartenant pas à la même zone $\leftrightarrow$ Arêtes de G

1. Étude du problème sur des arbres, $c \geq 3$
2. Étude du problème sur les cycles
3. Résolution du problème ouvert 2-Free-Flood-It
4. Caractérisation des graphes réduits
5. Bibliographie et conclusion

Étude du problème sur des arbres, $c \geq 3$

Résultat 1

Le problème c-Flood-It et c-Free-Flood-It sur un arbre avec $c \geq 3$ est NP-dur, et la version décisionnelle est NP-complète.

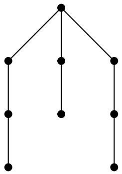
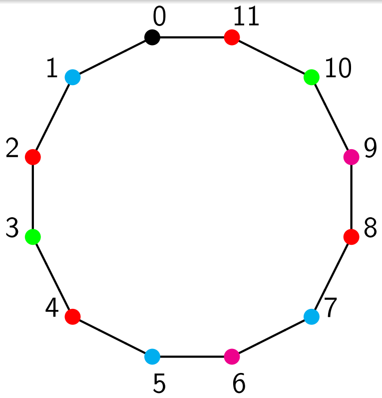


Figure: Exemple d'arbre utilisé dans la preuve du résultat précédent.

Étude du problème sur les cycles

Résultat 2

Le problème c-Flood-It sur un cycle, $c \in \mathbb{N}^*$, se résout en temps $\mathcal{O}(n^2 \log n)$, où n est le nombre de sommets du cycle.



1. Étude du problème sur des arbres, $c \geq 3$
2. Étude du problème sur les cycles
3. Résolution du problème ouvert 2-Free-Flood-It
4. Caractérisation des graphes réduits
5. Bibliographie et conclusion

Résolution du problème ouvert 2-Free-Flood-It

Théorème

Soit $G = (V, E)$ un graphe et $x \in V$. Alors
$R(G) - 1 \leq R(G/x) \leq R(G)$

Lemme

Si $c \in C(G)$, alors $R(G/c) = R(G) - 1$.

Résultat 3

Soit $G = (V, E)$ un graphe 2-coloriable. Alors, pour le problème 2-Free-Flood-It (*i.e.* on choisit à chaque coup le sommet depuis lequel on inonde), le nombre minimal de coups pour inonder G est le rayon $R(G)$.

Corollaire

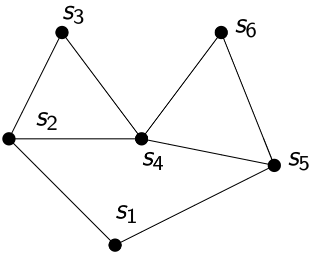
Soit G un graphe à n sommets et m arêtes, muni d'une 2-coloration φ. Alors le nombre minimal de coups pour inonder G, sachant que l'on peut choisir la source de chaque inondation, est $R(G^{Red})$. Le calcul du graphe réduit se fait en temps linéaire, et le rayon d'un graphe se calcule aisément en $\mathcal{O}(nm)$ (n parcours en largeur). Par conséquent, le problème 2-Free-Flood-It se résoud en temps polynomial en n, le nombre de sommets du graphe.

Caractérisation des graphes réduits

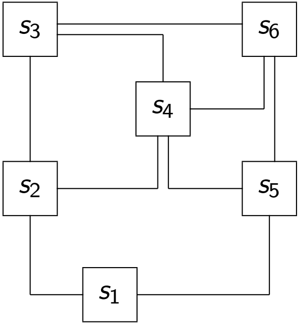
Lemme

Soit G un graphe planaire sans noeud de degré inférieur ou égal à 1. On suppose qu'il existe une carte telle que toutes les faces de G, sauf éventuellement la face externe, admettent 3 ou 4 côtés. Alors G est le graphe réduit d'un plateau de Flood-It.

- **Étape 1 : Construction du dessin orthogonal**



(a) Graphe planaire



(b) Dessin orthogonal

Figure: Dessin orthonal d'un graphe.

- **Étape 2 : Plongement des arêtes sur les cases du plateau**

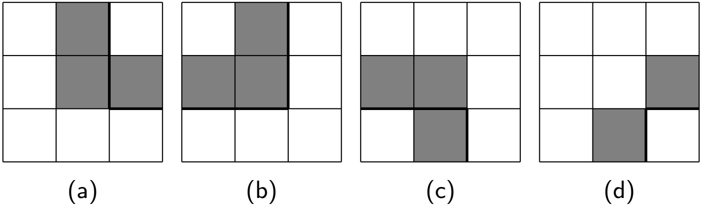


Figure: Gestion des changements de direction des arêtes. Les traits épais représentent les arêtes avant l'étape 2, et les cases grisées correspondent à ce que l'on obtient après la transformation. Le cas représenté à la figure (d) pose problème pour notre transformation, mais n'arrive jamais.

- **Étape 3 : Attribution des cases correspondant aux arêtes et aux sommets**

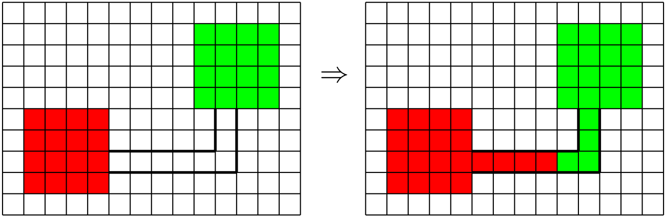
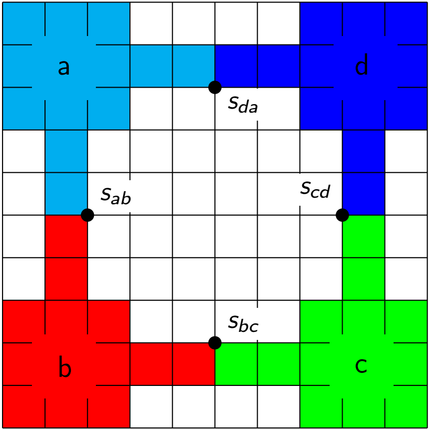
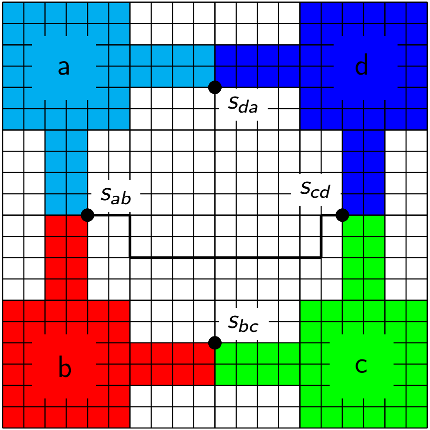
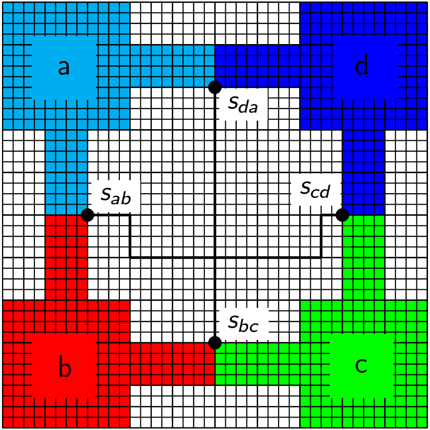


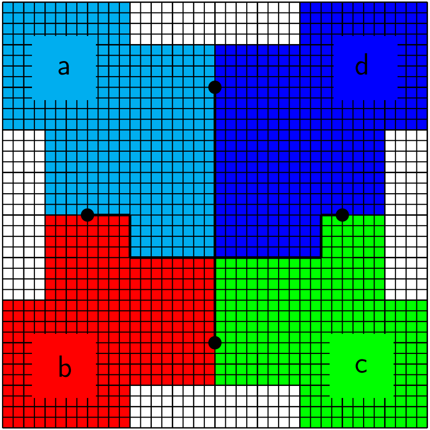
Figure: Attribution des cases d'une arête.

- **Étape 4 : Attribution des cases situées dans une zone intérieure vide**

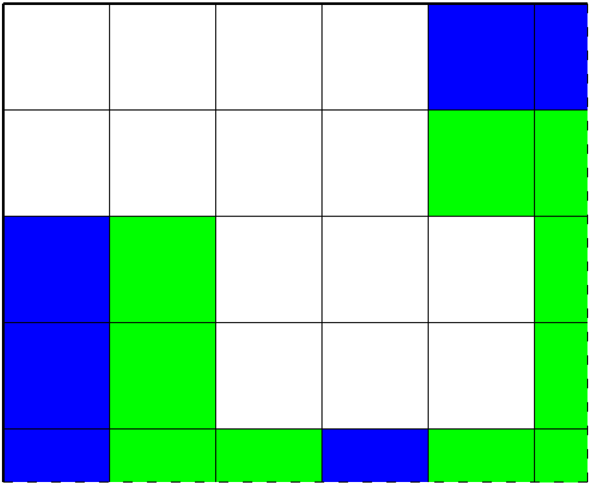


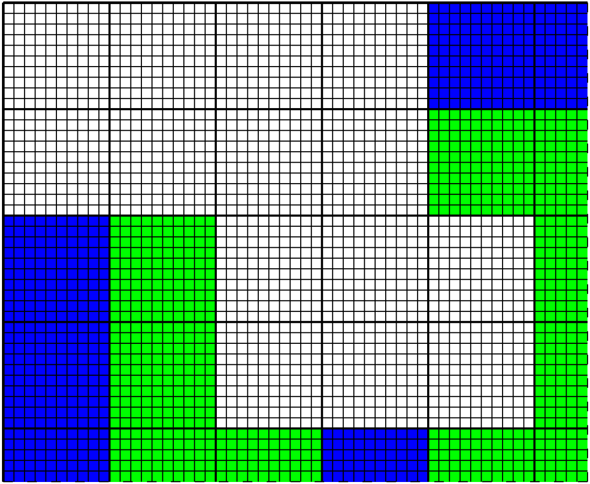

a
d
s_{da}
s_{ab}
s_{cd}
s_{bc}
b
c

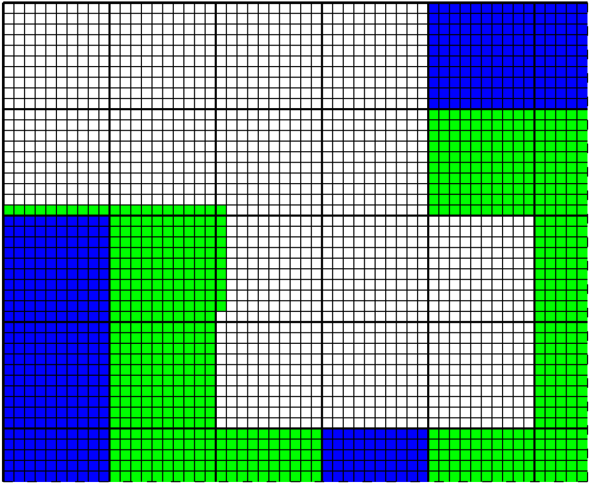

a
d
s_{da}
s_{ab}
s_{cd}
s_{bc}
b
c

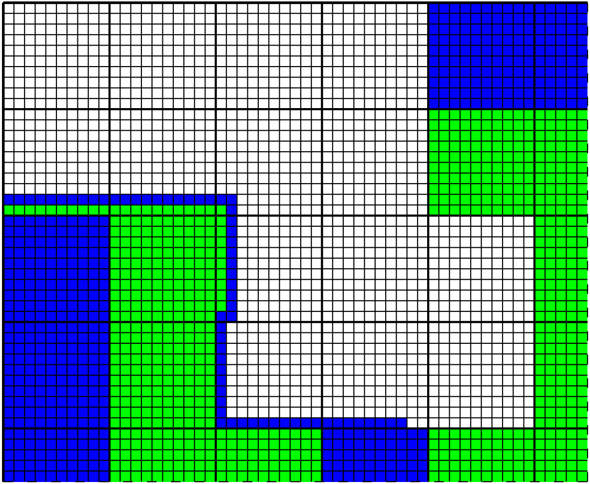

a
d
b
c

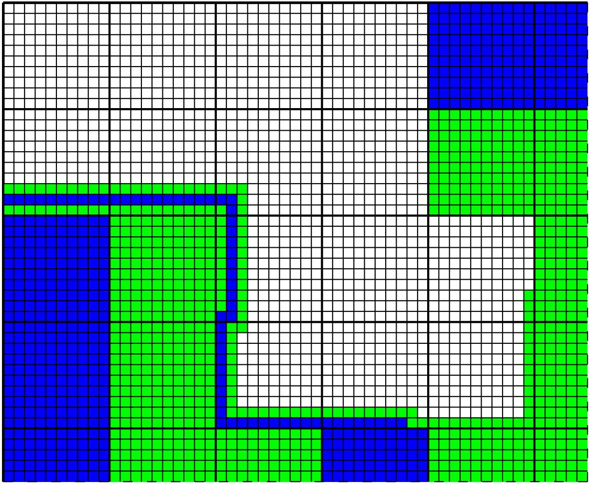
- **Étape 5 : Ajustement des dimensions du plateau et attribution des cases restantes**

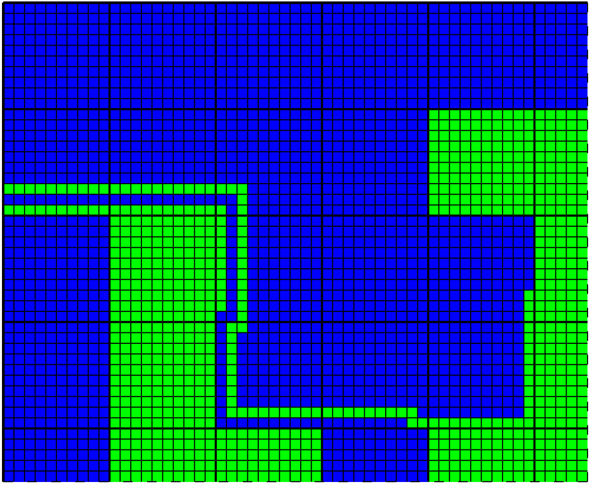












Résultat 4

Soit G un graphe et G' le graphe obtenu après élagage total de G (c'est-à-dire après suppression récursive des sommets de degré 1). Alors G est le graphe réduit d'un plateau de Flood-It si et seulement s'il existe une carte planaire de G' dont toutes les faces, sauf éventuellement la face externe, admettent au plus 4 côtés.
Si G est le graphe réduit d'un plateau, alors on obtient une carte particulière de G à partir de celle de G' en ajoutant des arbres de manière adéquate à un certain nombre de sommets.

Jeu flood-it.
http ://floodit.appspot.com/.

Jeu mad virus.
http ://www.bubblebox.com/play/puzzle/539.htm.

A. Darte.
On the complexity of loop fusion.
Technical report, Unité mixte de recherche CNRS-INRIA-ENS de Lyon, 1998.

K-J. Räihä et E. Ukkonen.
The shortest common supersequence over binary alphabet is np-complete.
Theoretical Computer Science, 187-198, 1981.

D. Arthur et R. Clifford et M. Jalsenius et A. Montanaro et B. Sach.
The complexity of flood filling games.
Arxiv, Jan 2010.

D. Arthur et R. Clifford et M. Jalsenius et A. Montanaro et B. Sach.
The complexity of flood filling games.
In *Proceedings of the Fifth International conference on Fun with Algorithms*, Juin 2010.
LNCS 6099, Springer.

K. Appel et W. Haken.
Every planar map is four coloriable.
Bulletin of the American Mathematical Society, 82, 1976.

D.E. Knuth.
The Art of Computer Programming, volume 3.
Addison-Wesley, 1973.
Section 5.1.4.

M. Kaufmann U. Fössmeier, G. Kant.
2-visibility drawings of planar graphs.
Technical report, Universität Tübigen, Germany et Utrecht University, Netherlands, 1997.

Douglas B. West.
Introduction To Graph Theory.
Prentice Hall, seconde edition, 2001.

Conclusion

Pistes de recherche :

- Complexité du problème c-Free-Flood-It sur les cycles
- Approche probabiliste des graphes réduits : nombre moyen de sommets, rayon moyen, etc.
- Algorithme plus efficace de calcul du rayon dans le cas des graphes réduits ?
- Détermination de la frontière pour laquelle le problème d'inondation devient polynomial.