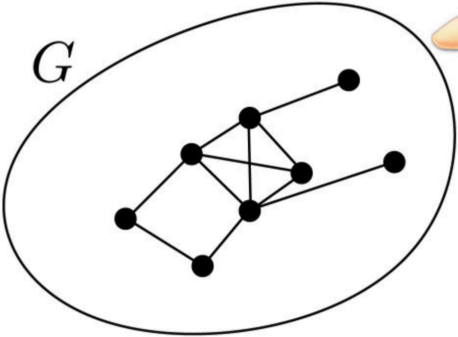
Clique-Stable séparation dans les graphes parfaits sans partition antisymétrique paire

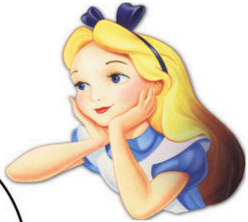
Aurélie Lagoutte, Théophile Trunck

LIP, ENS Lyon

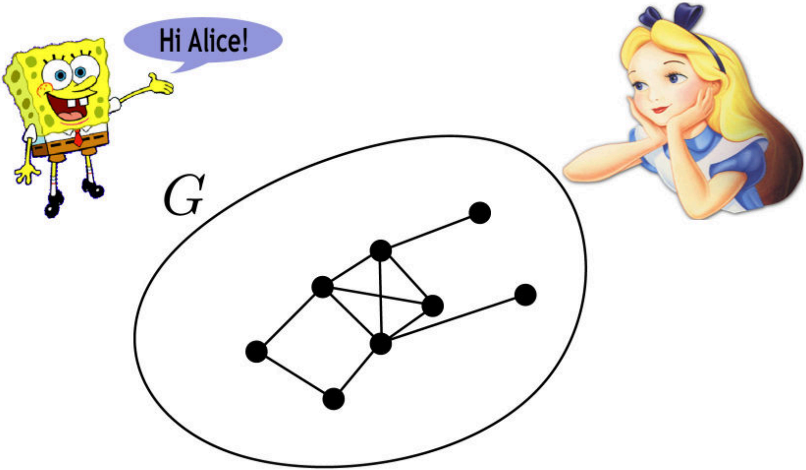
Jeudi 14 novembre 2013
Journées Graphes et Algortithmes

Problème Clique contre Stable

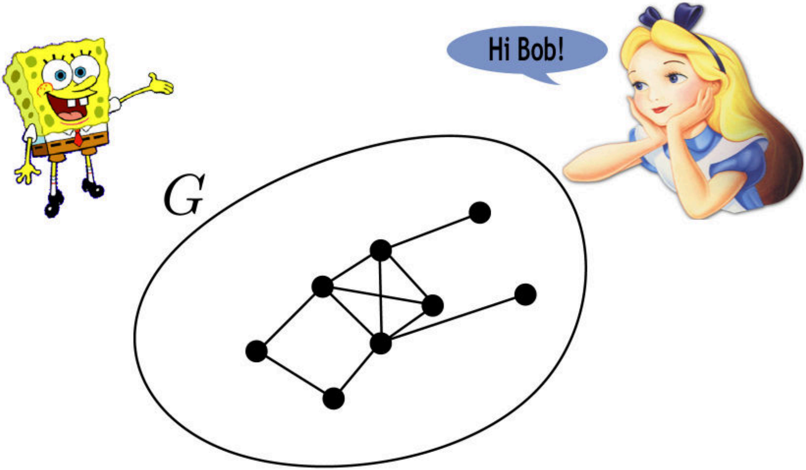




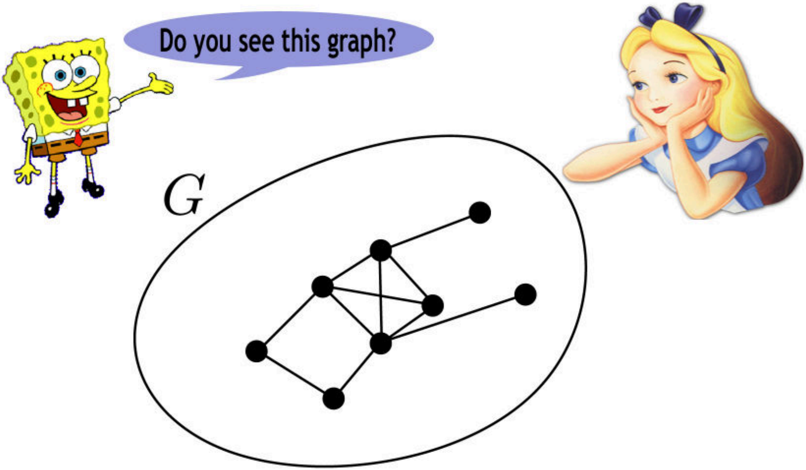
Problème Clique contre Stable



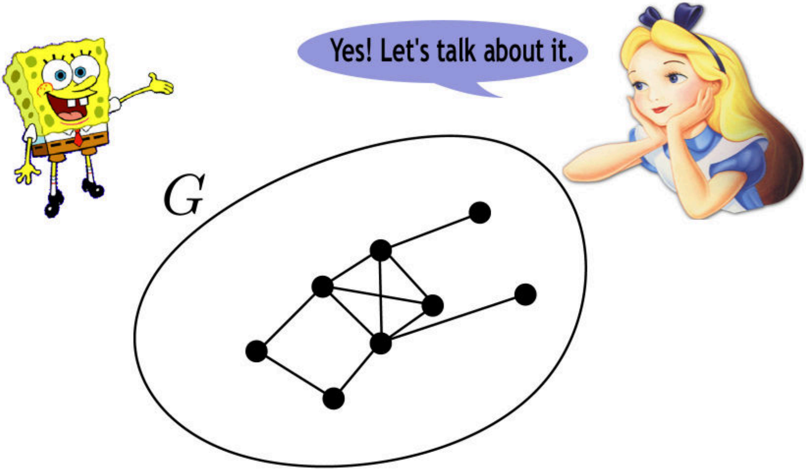
Problème Clique contre Stable



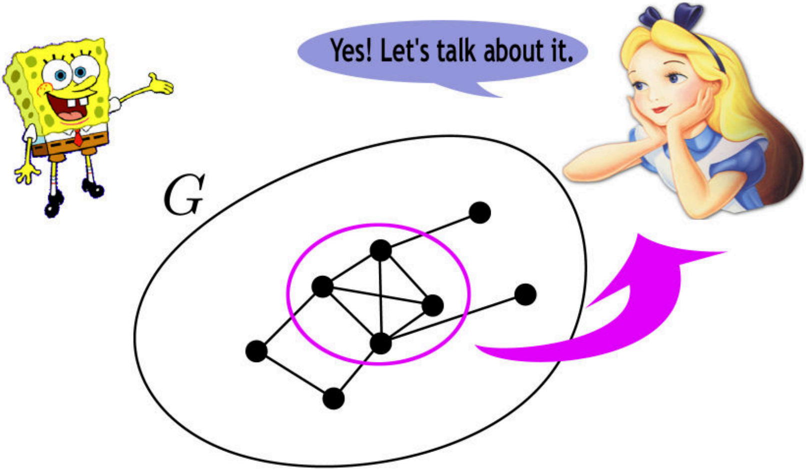
Problème Clique contre Stable



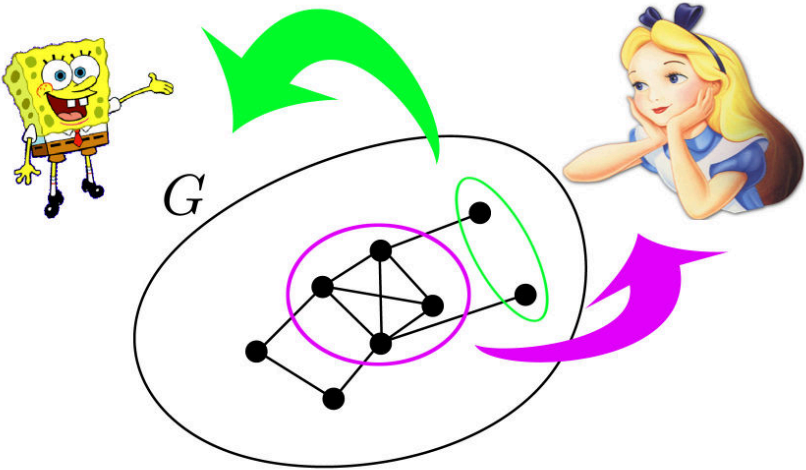
Problème Clique contre Stable



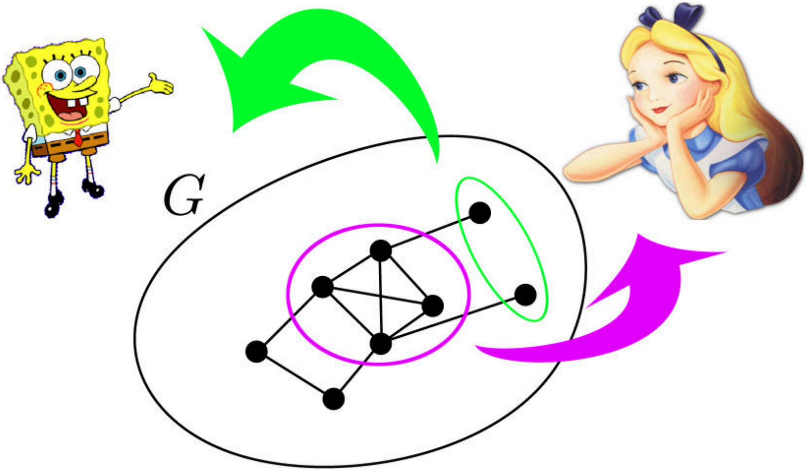
Problème Clique contre Stable



Problème Clique contre Stable

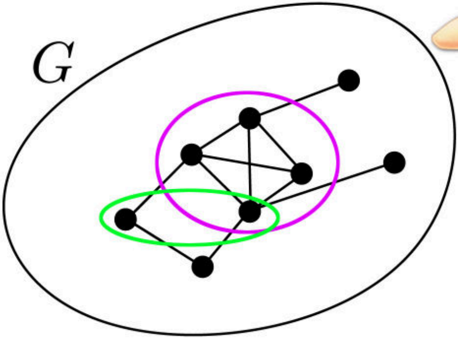


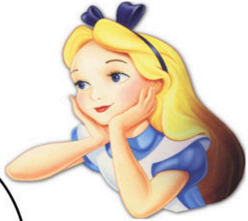
Problème Clique contre Stable



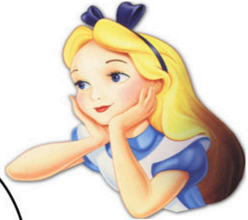
Do the clique and the stable intersect?

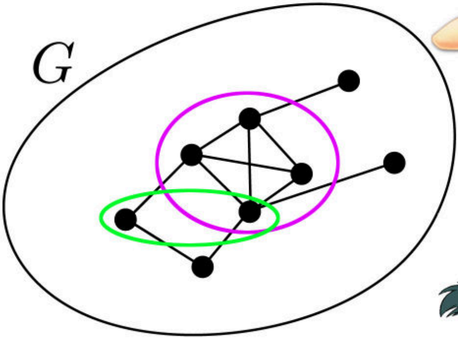
Problème Clique contre Stable : version Non-det.



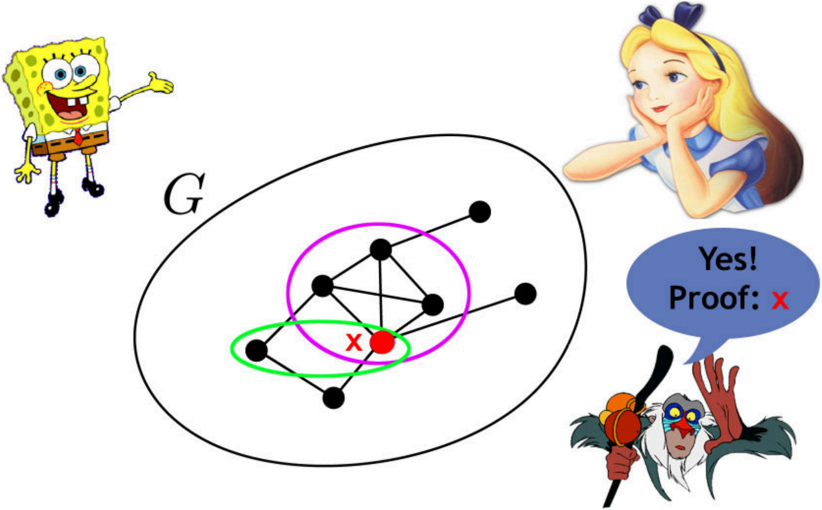


Problème Clique contre Stable : version Non-det.

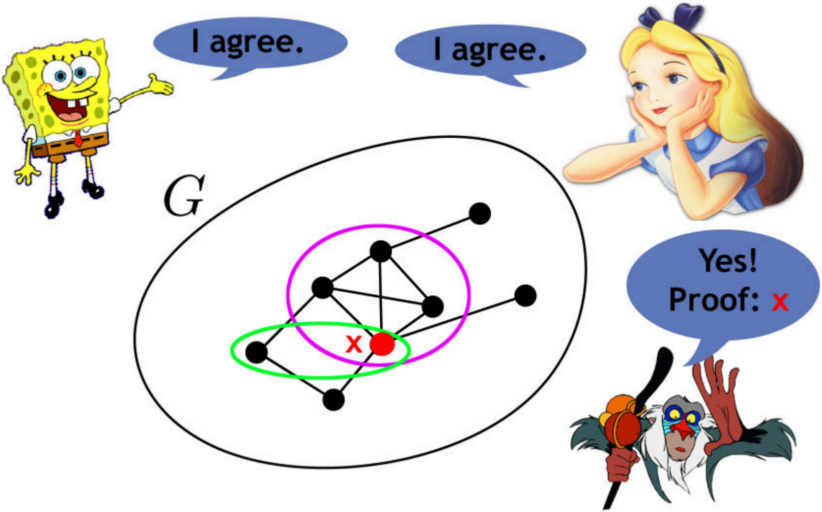




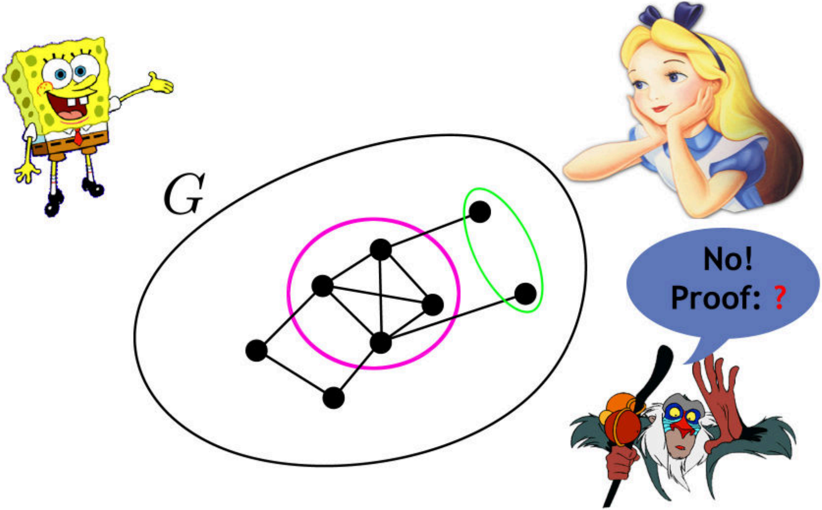
Problème Clique contre Stable : version Non-det.



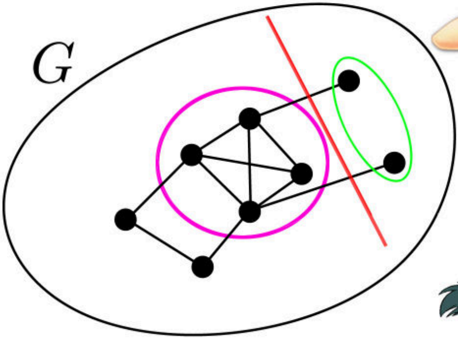
Problème Clique contre Stable : version Non-det.

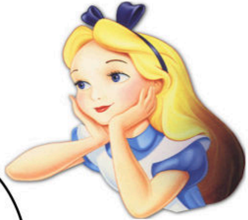


Problème Clique contre Stable : version Non-det.

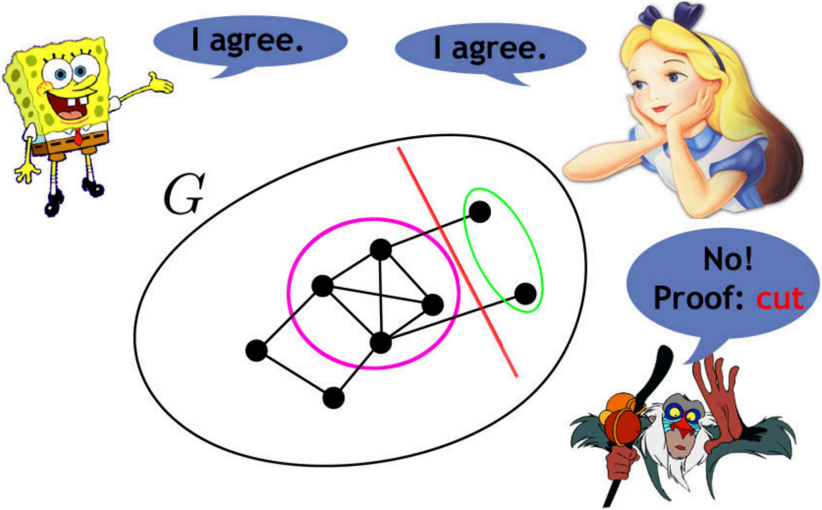


Problème Clique contre Stable : version Non-det.





Problème Clique contre Stable : version Non-det.



Problème Clique contre Stable

But

Trouver un *Clique-Stable séparateur* : une famille de coupes qui peut séparer toutes les paires Clique-Stable.

Problème Clique contre Stable

But

Trouver un *Clique-Stable séparateur* : une famille de coupes qui peut séparer toutes les paires Clique-Stable.

Théoreme [Yannakakis 1991]

Complexité de communication non-déterministe $= \log m$
où m est la taille minimale d'un CS-séparateur.
Si $m = n^c$, alors la complexité est de $\mathcal{O}(\log n)$.

Problème Clique contre Stable

But

Trouver un *Clique-Stable séparateur* : une famille de coupes qui peut séparer toutes les paires Clique-Stable.

Théoreme [Yannakakis 1991]

Complexité de communication non-déterministe $= \log m$
où m est la taille minimale d'un CS-séparateur.
Si $m = n^c$, alors la complexité est de $\mathcal{O}(\log n)$.

Borne existante : Il existe un CS-separateur de taille $\mathcal{O}(n^{\log n})$.

Problème Clique contre Stable

But

Trouver un *Clique-Stable séparateur* : une famille de coupes qui peut séparer toutes les paires Clique-Stable.

Théoreme [Yannakakis 1991]

Complexité de communication non-déterministe $= \log m$
où m est la taille minimale d'un CS-séparateur.
Si $m = n^c$, alors la complexité est de $\mathcal{O}(\log n)$.

Borne existante : Il existe un CS-separateur de taille $\mathcal{O}(n^{\log n})$.
Est-ce qu'il existe pour tout graphe G à n sommets un CS-separateur de taille poly(n) ? Pour quelles classes de graphes est-ce vrai ?

Graphe parfait

On note $\omega(G)$ la taille maximale d'une clique et $\chi(G)$ le nombre chromatique de G. Un graphe est appelé *parfait* si pour tout sous-graphe induit H, on a :

$$\chi(H) = \omega(H)$$

Graphe de Berge

Un *trou* est un cycle induit (sans corde) de longueur au moins 4. Un graphe G est *de Berge* si ni G ni $\overline{G}$ n' ont de trou de longueur impaire.

Théorème fort des graphes parfaits, [Chudnovsky, Roberston, Seymour, Thomas, 2006]

Un graphe est parfait si et seulement si il est de Berge.

Decomposition [Chudnovsky, Roberston, Seymour, Thomas]

Si un graphe de Berge, alors pour G ou $\overline{G}$:

- Soit c'est un graphe basique : biparti, line graphe de biparti, ou double split.
- Soit il admet un 2-joint
- Soit il admet une partition antisymétrique paire (*balanced skew partition*)

Decomposition [Chudnovsky, Roberston, Seymour, Thomas]

Si un graphe de Berge, alors pour G ou $\overline{G}$:

- Soit c'est un graphe basique : biparti, line graphe de biparti, ou double split.
- Soit il admet un 2-joint
- Soit il admet une partition antisymétrique paire (*balanced skew partition*)

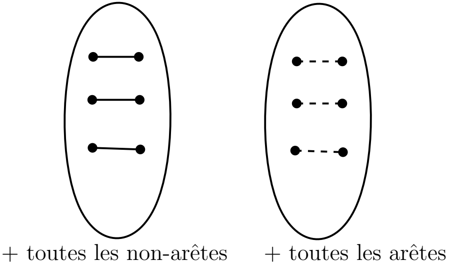


FIGURE : Double split

Decomposition [Chudnovsky, Roberston, Seymour, Thomas]

Si un graphe de Berge, alors pour G ou $\overline{G}$:

- Soit c'est un graphe basique : biparti, line graphe de biparti, ou double split.
- Soit il admet un 2-joint
- Soit il admet une partition antisymétrique paire (*balanced skew partition*)

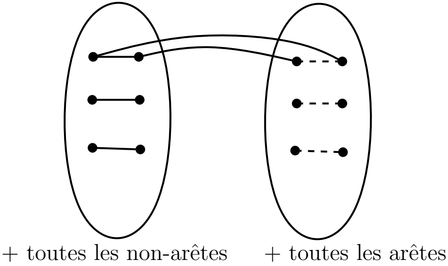


FIGURE : Double split

Decomposition [Chudnovsky, Roberston, Seymour, Thomas]

Si un graphe de Berge, alors pour G ou $\overline{G}$:

- Soit c'est un graphe basique : biparti, line graphe de biparti, ou double split.
- Soit il admet un 2-joint
- Soit il admet une partition antisymétrique paire (*balanced skew partition*)

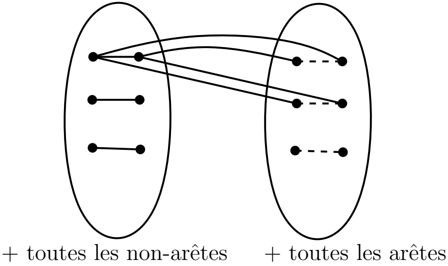


Figure : Double split

Decomposition [Chudnovsky, Roberston, Seymour, Thomas]

Si un graphe de Berge, alors pour G ou $\overline{G}$:

- Soit c'est un graphe basique : biparti, line graphe de biparti, ou double split.
- Soit il admet un 2-joint
- Soit il admet une partition antisymétrique paire (*balanced skew partition*)

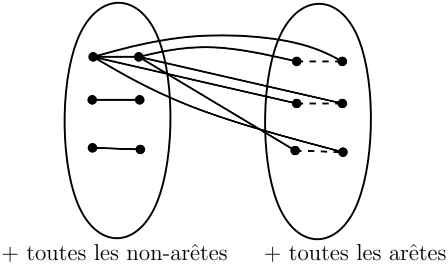


Figure : Double split

Decomposition [Chudnovsky, Roberston, Seymour, Thomas]

Si un graphe de Berge, alors pour G ou $\overline{G}$:

- Soit c'est un graphe basique : biparti, line graphe de biparti, ou double split.
- Soit il admet un 2-joint
- Soit il admet une partition antisymétrique paire (*balanced skew partition*)

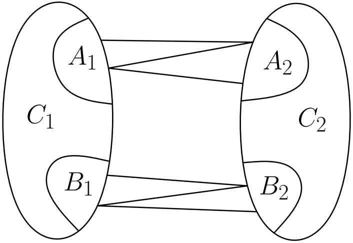


FIGURE : 2-joint

Decomposition [Chudnovsky, Roberston, Seymour, Thomas]

Si un graphe de Berge, alors pour G ou $\overline{G}$:

- Soit c'est un graphe basique : biparti, line graphe de biparti, ou double split.
- Soit il admet un 2-joint
- Soit il admet une partition antisymétrique paire (*balanced skew partition*)

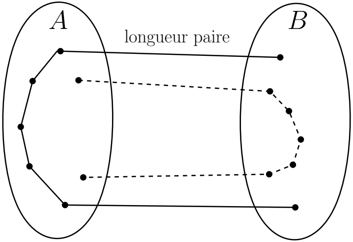


FIGURE : Partition paire

Decomposition [Chudnovsky, Roberston, Seymour, Thomas]

Si un graphe de Berge, alors pour G ou $\overline{G}$:

- Soit c'est un graphe basique : biparti, line graphe de biparti, ou double split.
- Soit il admet un 2-joint
- Soit il admet une partition antisymétrique paire (*balanced skew partition*)

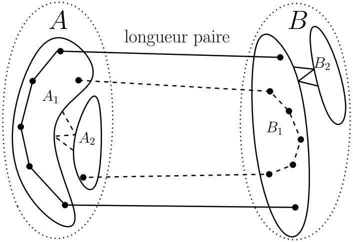


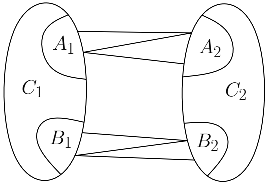
FIGURE : Partition antisymétrique paire

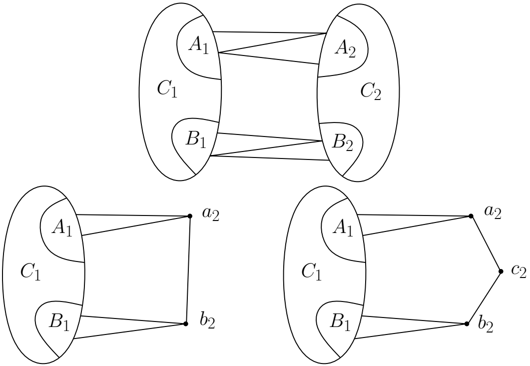
[L., Trunck, 2013]

Soit G un graphe parfait sans partition antisymétrique paire, alors il existe un Clique-Stable séparateur pour G de taille $\mathcal{O}(n^2)$.

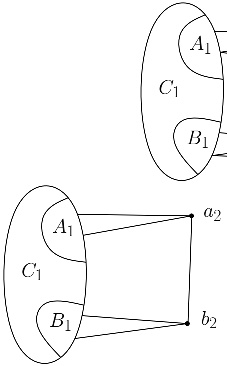
Preuve par récurrence :

- Pour les graphes basiques
- Pour un graphe G avec un 2-joint :
  à partir de G, on construit un (deux) graphe(s) parfait(s) G' sans partition antisymétrique paire
  [Chudnovsky, Trotignon, Trunck, Vušković 2012]
  $\Rightarrow$ un Clique-Stable séparateur pour G' par hypothèse de récurrence
  $\Rightarrow$ on le transforme en un Clique-Stable séparateur pour G.

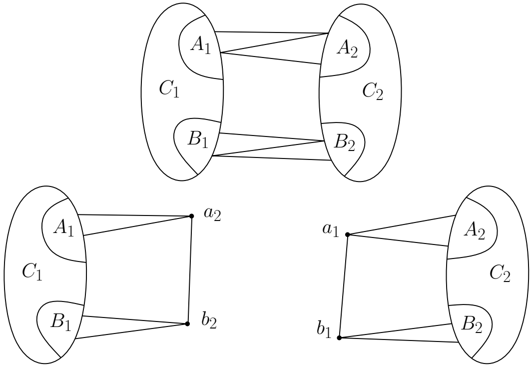

A_1
A_2
C_1
C_2
B_1
B_2



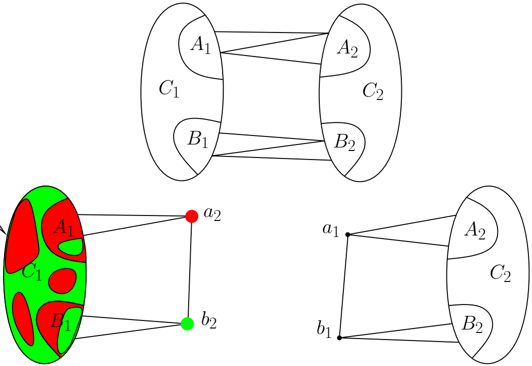
A_1
A_2
C_1
C_2
B_1
B_2
A_1
a_2
C_1
B_1
b_2
A_1
a_2
C_1
c_2
B_1
b_2



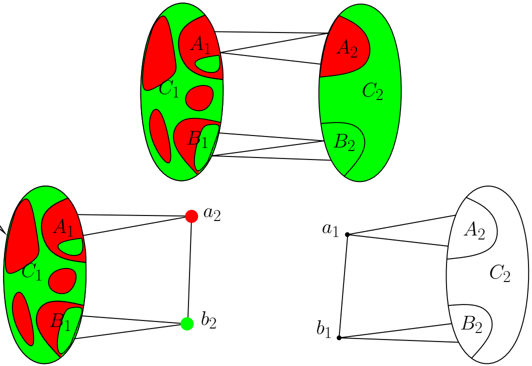
A_1
A_2
C_1
C_2
B_1
B_2
A_1
a_2
C_1
B_1
b_2


A_1
A_2
C_1
C_2
B_1
B_2
A_1
a_2
C_1
B_1
b_2
a_1
A_2
C_2
b_1
B_2

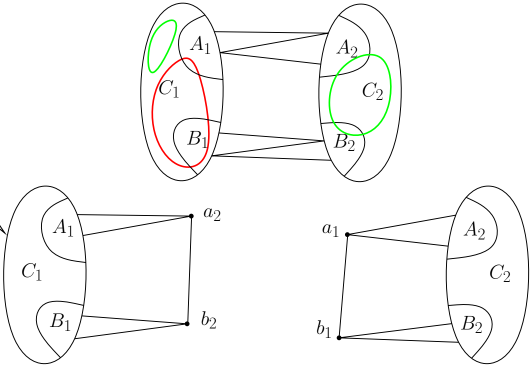
Rouge=
Ce qui est mis à gauche (côté clique)
Vert=
Ce qui est mis à droite (côté stable)



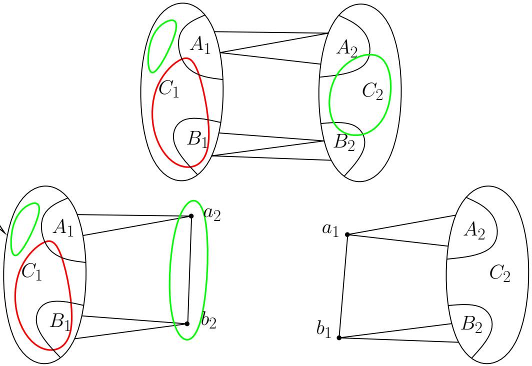
Rouge=
Ce qui est mis à gauche (côté clique)
Vert=
Ce qui est mis à droite (côté stable)



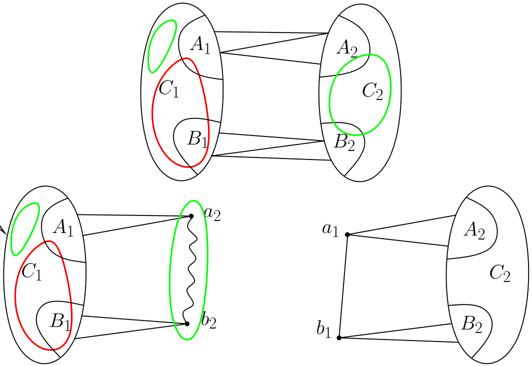
Rouge=
Ce qui est mis à gauche (côté clique)
Vert=
Ce qui est mis à droite (côté stable)



Rouge=
Ce qui est mis à gauche (côté clique)
Vert=
Ce qui est mis à droite (côté stable)



Rouge=
Ce qui est mis à gauche (côté clique)
Vert=
Ce qui est mis à droite (côté stable)



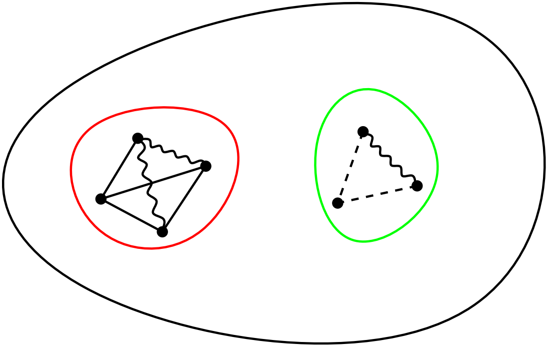
Trigraphes [Chudnovsky, 2006]

Un trigraphe est constitué d'un ensemble de sommets V, et entre chaque paire de sommets u et v, il y a soit :

- Une arête forte : $u \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, v$
- Une non-arête forte : $u \bullet - - - \bullet\, v$ ou $u \bullet \quad\quad \bullet\, v$
- Une arête non-determinée (qui peut servir à la fois d'arête ou de non-arête) : $u \bullet\!\sim\!\sim\!\sim\!\bullet\, v$

Un trigraphe a un trou si l'on peut choisir les arêtes non-déterminées de façon à créer un trou. Un trigraphe T est de Berge si ni T ni $\overline{T}$ n'ont de trous impairs.

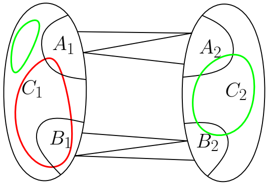
Clique-Stable séparation dans les trigraphes :
Une clique (resp. un stable) peut contenir des arêtes non-déterminées.

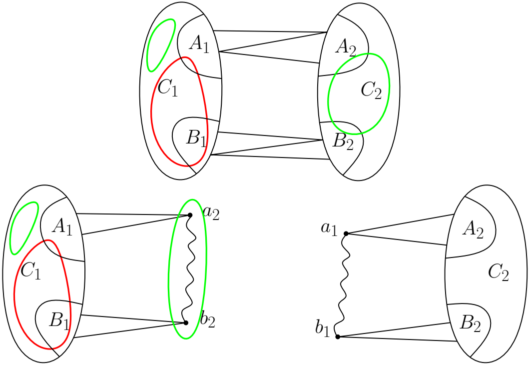


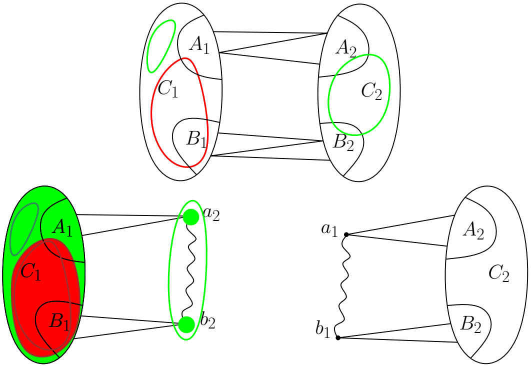
Decomposition [Chudnovsky, 2006]

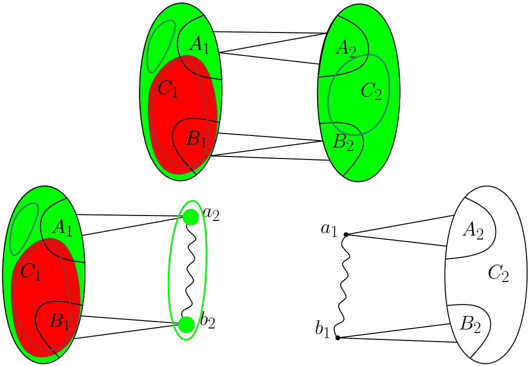
Si un trigraphe T est de Berge, alors pour T ou $\overline{T}$:

- Soit c'est un trigraphe basique : biparti, line trigraphe, ou doublé.
- Soit il admet un 2-joint
- Soit il admet une partition antisymétrique paire (*balanced skew partition*)

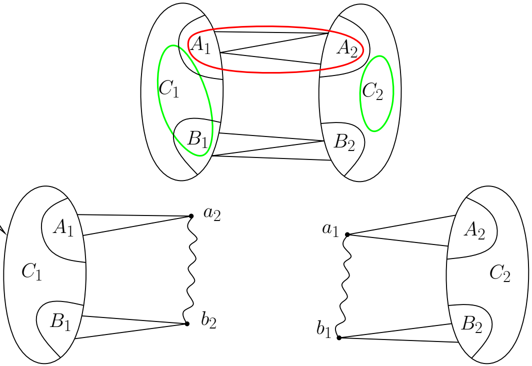

A_1
C_1
B_1
A_2
C_2
B_2


A_1
C_1
B_1
A_2
C_2
B_2
A_1
C_1
B_1
a_2
b_2
a_1
b_1
A_2
C_2
B_2


A_1
C_1
B_1
A_2
C_2
B_2
A_1
C_1
B_1
a_2
b_2
a_1
b_1
A_2
C_2
B_2

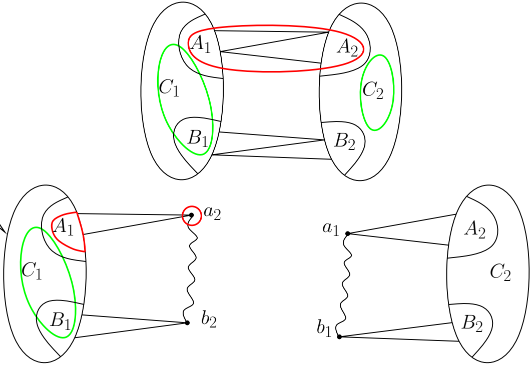

A_1
C_1
B_1
A_2
C_2
B_2
A_1
C_1
B_1
a_2
b_2
a_1
b_1
A_2
C_2
B_2

Rouge=
Ce qui est mis à gauche (côté clique)
Vert=
Ce qui est mis à droite (côté stable)

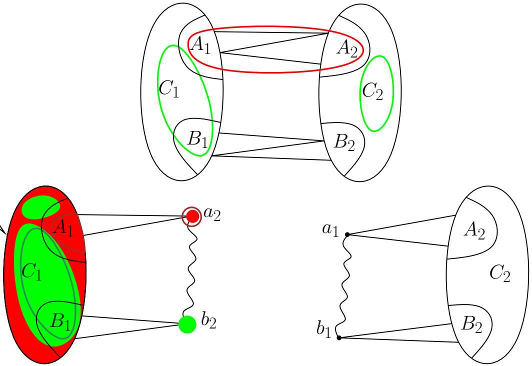


Rouge=
Ce qui est mis à gauche (côté clique)

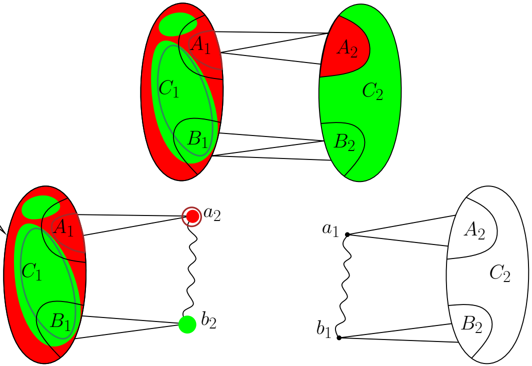
Vert=
Ce qui est mis à droite (côté stable)



Rouge=
Ce qui est mis à gauche (côté clique)
Vert=
Ce qui est mis à droite (côté stable)



Rouge=
Ce qui est mis à gauche (côté clique)
Vert=
Ce qui est mis à droite (côté stable)



$\Rightarrow$ Si $n = n_g + n_d$:

$$\begin{aligned} |\text{CS-sép pour } G| &\leq |\text{CS-sép bloc gauche}| + |\text{CS-sep bloc droit}| \\ &\leq c.(n_g+3)^2 + c.(n_d+3)^2 \\ &\leq c.n^2 \end{aligned}$$

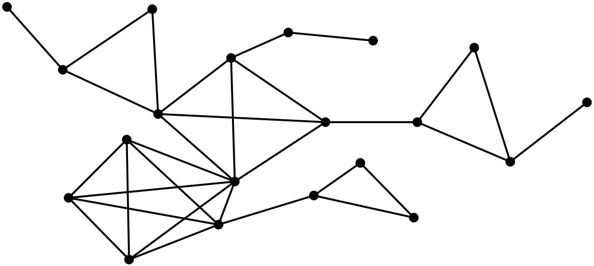
$\Rightarrow$ Il suffit de montrer qu'il existe un Clique-Stable séparateur de taille $\mathcal{O}(n^2)$ pour chaque graphe basique.

Dans les graphes basiques :

- Dans un biparti, une clique est soit un sommet, soit une arête, soit une arête indéterminée $\Rightarrow$ il y a au plus $\mathcal{O}(n^2)$ cliques. On définit F comme la famille des coupes $(K, V \setminus K)$ où K est une clique.

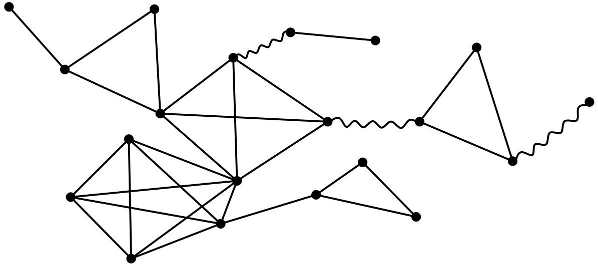
Dans les graphes basiques :

- Dans un biparti, une clique est soit un sommet, soit une arête, soit une arête indéterminée $\Rightarrow$ il y a au plus $\mathcal{O}(n^2)$ cliques. On définit F comme la famille des coupes $(K, V \setminus K)$ où K est une clique.
- Un line trigaphe est obtenu à partir d'un line graphe de biparti G dont on a changé certaines arêtes en arêtes indéterminées. Une clique est une clique du graphe original donc il y a un nombre linéaire de cliques maximales.



Dans les graphes basiques :

- Dans un biparti, une clique est soit un sommet, soit une arête, soit une arête indéterminée $\Rightarrow$ il y a au plus $\mathcal{O}(n^2)$ cliques. On définit F comme la famille des coupes $(K, V \setminus K)$ où K est une clique.
- Un line trigaphe est obtenu à partir d'un line graphe de biparti G dont on a changé certaines arêtes en arêtes indéterminées. Une clique est une clique du graphe original donc il y a un nombre linéaire de cliques maximales.



Perspectives

- Etudier la Clique-Stable séparation sur d'autres classes de graphes (graphes parfaits ?)
- Prouver qu'il n'existe pas de Clique-Stable séparateur polynomial en général ?
- Quels sont les liens entre la Clique-Stable séparation et les autres propriétés des classes de graphes ? (Erdös-Hajnal : Il existe ε tel que pour tout $G \in \mathcal{C}$, il existe une clique ou un stable de taille n^{ε})

Perspectives

- Etudier la Clique-Stable séparation sur d'autres classes de graphes (graphes parfaits ?)
- Prouver qu'il n'existe pas de Clique-Stable séparateur polynomial en général ?
- Quels sont les liens entre la Clique-Stable séparation et les autres propriétés des classes de graphes ? (Erdös-Hajnal : Il existe ε tel que pour tout $G \in \mathcal{C}$, il existe une clique ou un stable de taille n^{ε})

Merci ! Avez-vous des questions ?