Êtes-vous au point sur le coloriage?

Aurélie Lagoutte

LIP, ENS Lyon

Mercredi 15 Juin 2016
Visite de la MMI suite au concours Alkindi

Thèse en informatique fondamentale

Thèse en informatique fondamentale

Thèse en informatique fondamentale

Enseignement
(TD à la fac)

Thèse en informatique fondamentale

Enseignement
(TD à la fac)

Recherche

?

Thèse en informatique fondamentale

= Mathématiques discrètes

Enseignement
(TD à la fac)

Recherche ?

Thèse en informatique fondamentale

= Mathématiques discrètes

Enseignement
(TD à la fac)

Recherche ?

~~Réparer les ordinateurs, Word, Excel~~

Thèse en informatique fondamentale

= Mathématiques discrètes

Enseignement
(TD à la fac)

Recherche ?

~~Réparer les ordinateurs, Word, Excel~~

~~Programmation~~

Thèse en informatique fondamentale

= Mathématiques discrètes

Enseignement (TD à la fac)

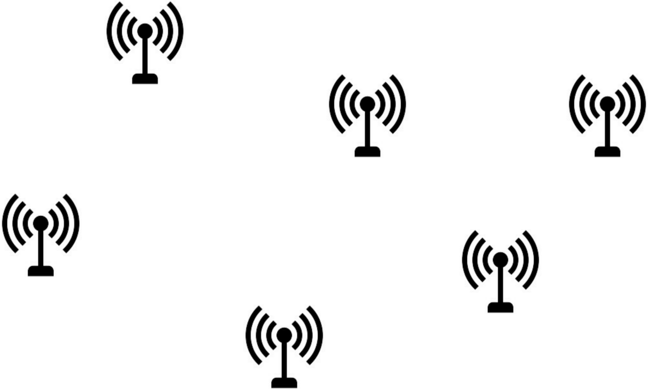
Recherche ?

Prouver des théorèmes avec un papier et un crayon

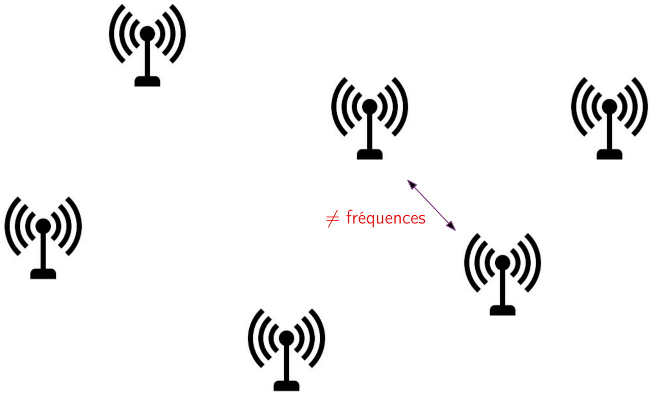
~~Réparer les ordinateurs, Word, Excel~~

~~Programmation~~

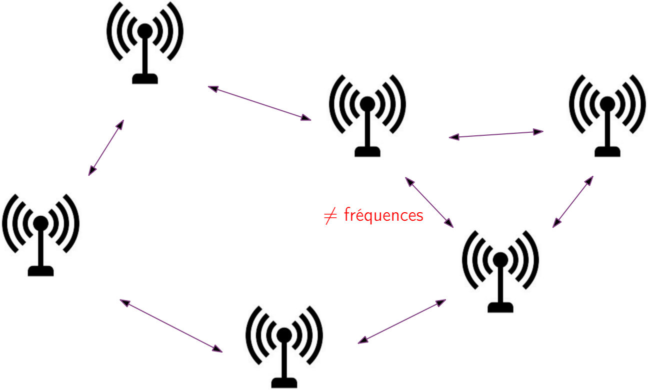
Problème n° 1 : les antennes radio



Problème n° 1 : les antennes radio

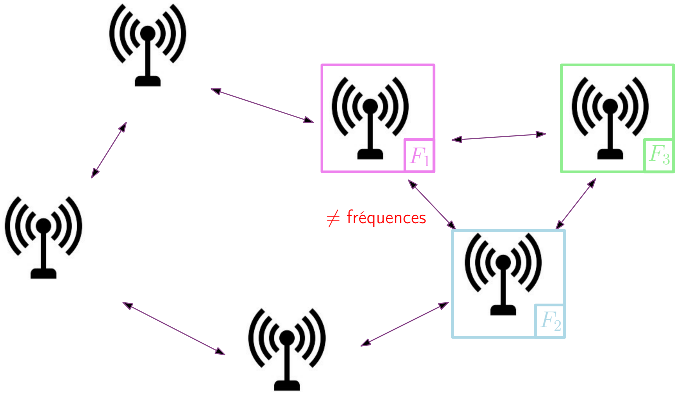


Problème n° 1 : les antennes radio



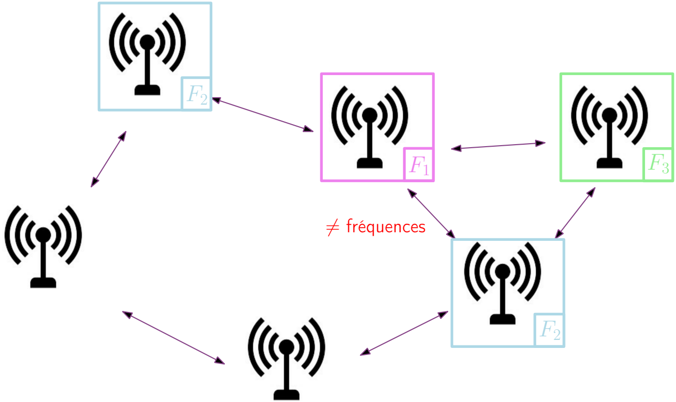
But : acheter le moins de fréquences possible.

Problème n° 1 : les antennes radio



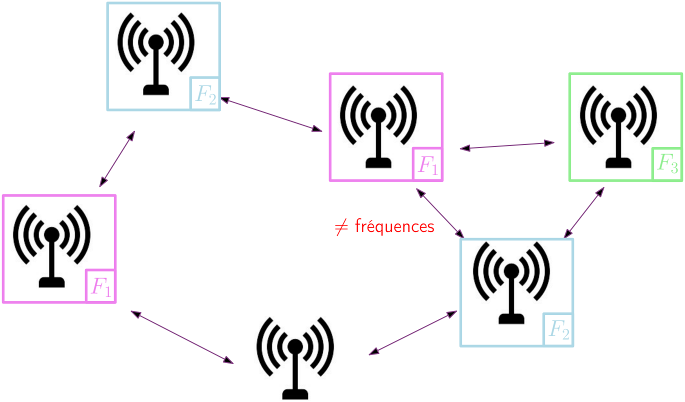
But : acheter le moins de fréquences possible.

Problème n° 1 : les antennes radio



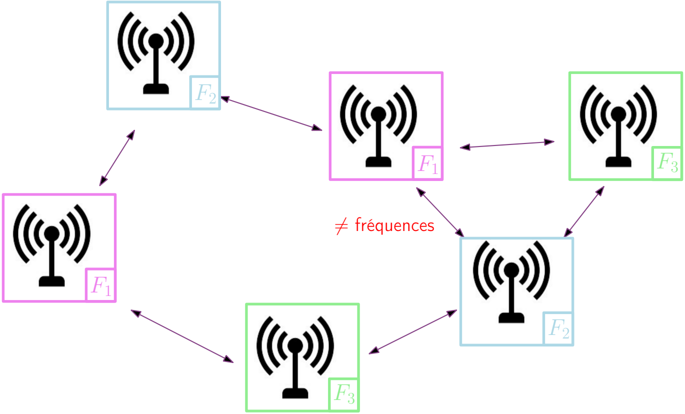
But : acheter le moins de fréquences possible.

Problème n° 1 : les antennes radio



But : acheter le moins de fréquences possible.

Problème n° 1 : les antennes radio



But : acheter le moins de fréquences possible.

Optimal : 3 fréquences.

Problème n° 2 : les emplois du temps

Cours	Horaire
Français	8h30-10h30
Anglais	9h-10h
Maths	14h-16h
Histoire-Géo	11h-12h
Physique	9h45-11h45

But : utiliser le moins de salles possible.

Problème n° 2 : les emplois du temps

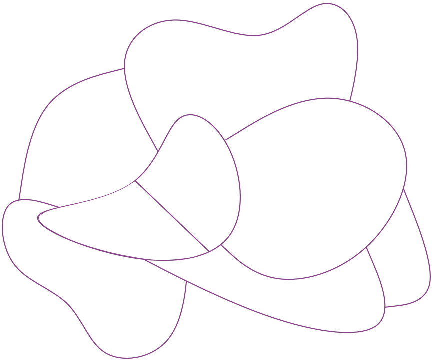
Cours	Horaire
Français	8h30-10h30
Anglais	9h-10h
Maths	14h-16h
Histoire-Géo	11h-12h
Physique	9h45-11h45

But : utiliser le moins de salles possible.

Optimal : 3 salles (témoin : Français, Anglais et Physique).

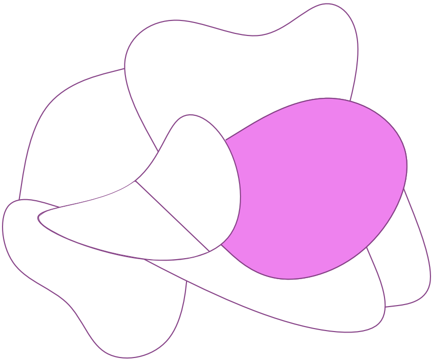
Problème n° 3 : La carte de Géographie

Problème n° 3 : La carte de Géographie



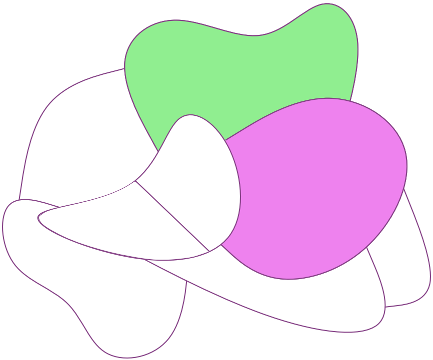
But : utiliser le moins de couleurs possibles.

Problème n° 3 : La carte de Géographie



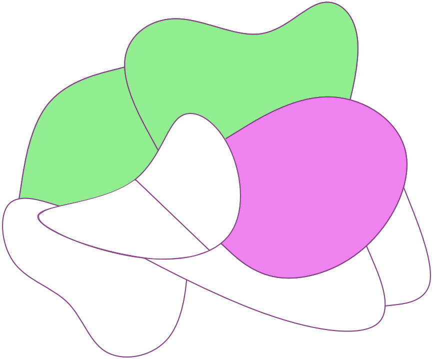
But : utiliser le moins de couleurs possibles.

Problème n° 3 : La carte de Géographie



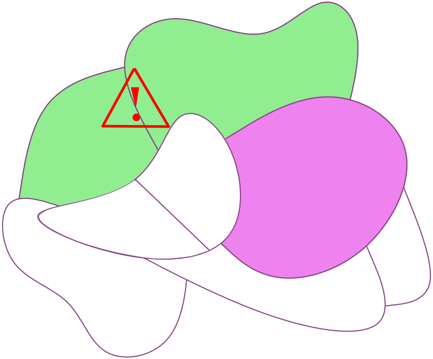
But : utiliser le moins de couleurs possibles.

Problème n° 3 : La carte de Géographie



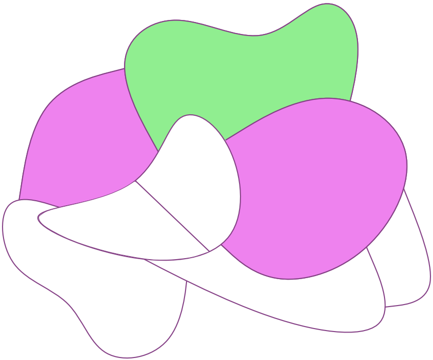
But : utiliser le moins de couleurs possibles.

Problème n° 3 : La carte de Géographie



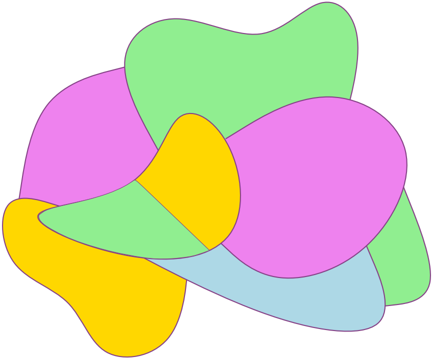
But : utiliser le moins de couleurs possibles.

Problème n° 3 : La carte de Géographie



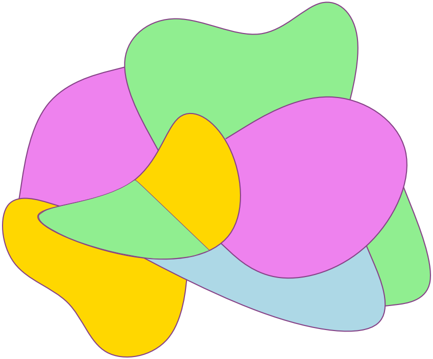
But : utiliser le moins de couleurs possibles.

Problème n° 3 : La carte de Géographie



But : utiliser le moins de couleurs possibles.

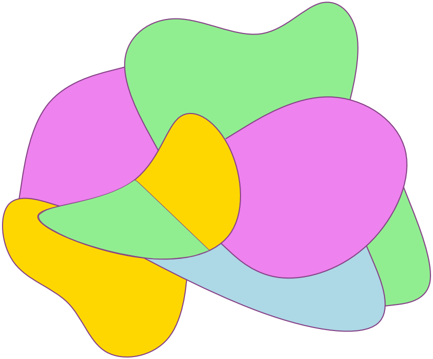
Problème n° 3 : La carte de Géographie



But : utiliser le moins de couleurs possibles.

Optimal : 4 couleurs

Problème n° 3 : La carte de Géographie



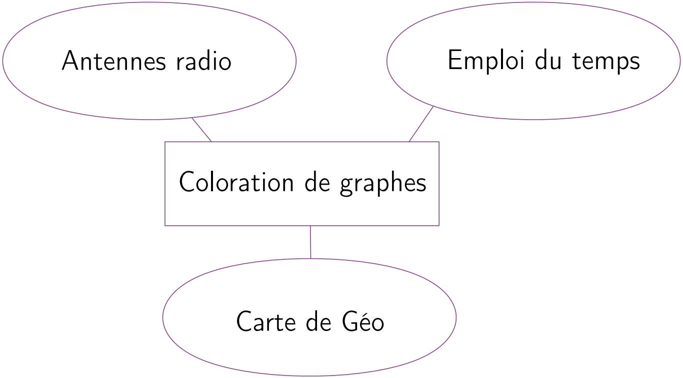
But : utiliser le moins de couleurs possibles.

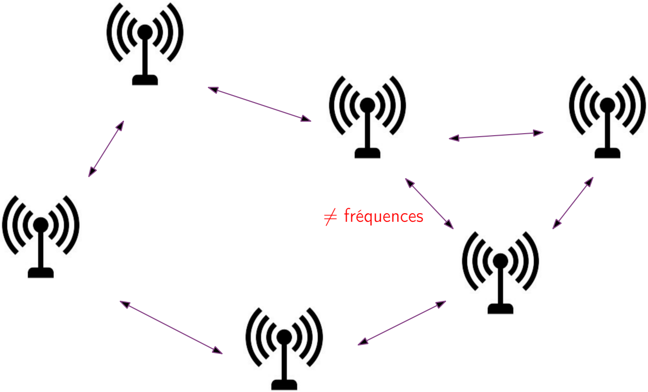
Optimal : 4 couleurs (témoin : ?)

Antennes radio

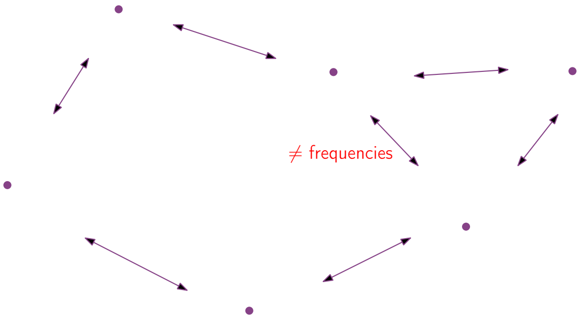
Emploi du temps

Carte de Géo


Antennes radio
Emploi du temps
Coloration de graphes
Carte de Géo

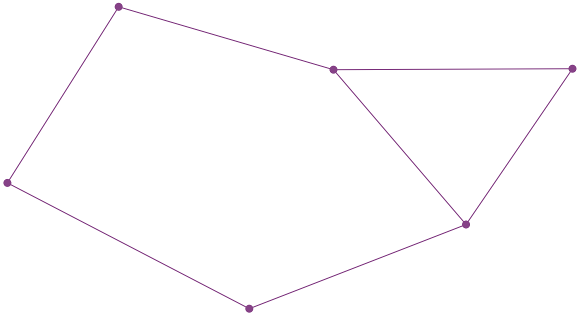


Un **graphe**, c'est :



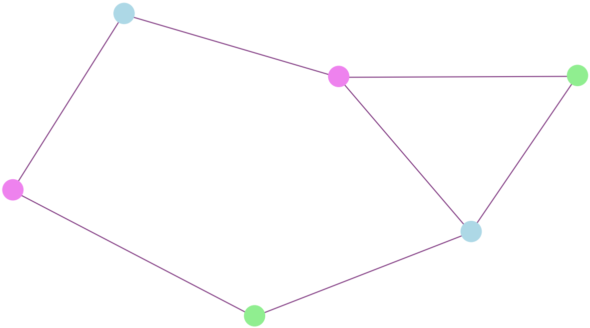
Un **graphe**, c'est :

- des **sommets** (les points)



Un **graphe**, c'est :

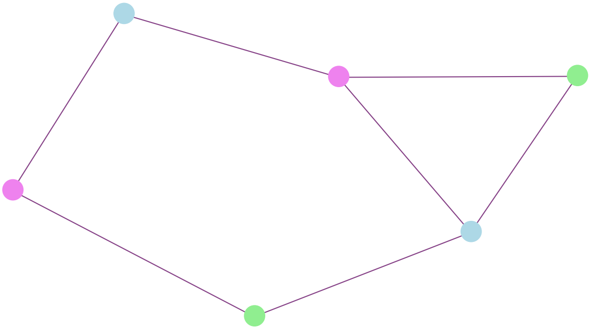
- des **sommets** (les points)
- des **arêtes** (les traits)



Un **graphe**, c'est :

- des **sommets** (les points)
- des **arêtes** (les traits)

Dans une **coloration propre**, deux sommets reliés ont des couleurs différentes.



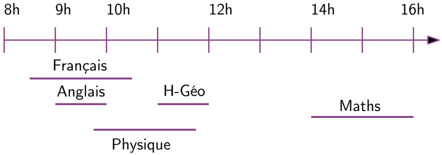
Un **graphe**, c'est :

- des **sommets** (les points)
- des **arêtes** (les traits)

Dans une **coloration propre**, deux sommets **adjacents** ont des couleurs différentes.

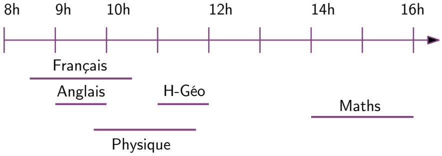
Problème nº 2 : les emplois du temps

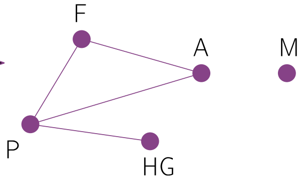
Cours	Horaire
Français	8h30-10h30
Anglais	9h-10h
Maths	14h-16h
Histoire-Géo	11h-12h
Physique	9h45-11h45



Problème n° 2 : les emplois du temps

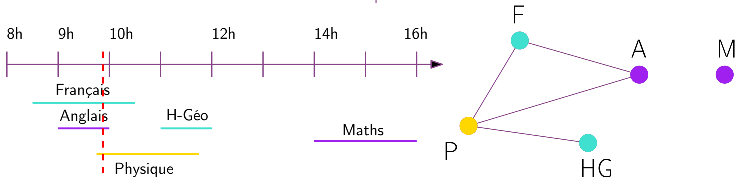
Cours	Horaire
Français	8h30-10h30
Anglais	9h-10h
Maths	14h-16h
Histoire-Géo	11h-12h
Physique	9h45-11h45



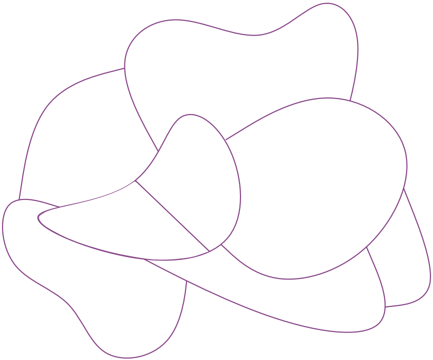


Problème nº 2 : les emplois du temps

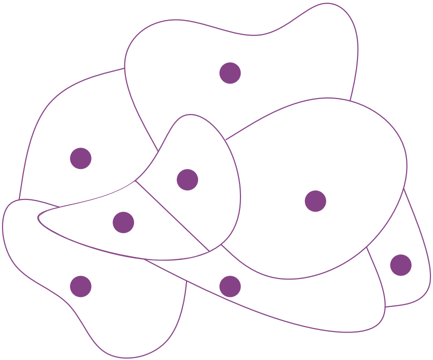
Cours	Horaire
Français	8h30-10h30
Anglais	9h-10h
Maths	14h-16h
Histoire-Géo	11h-12h
Physique	9h45-11h45



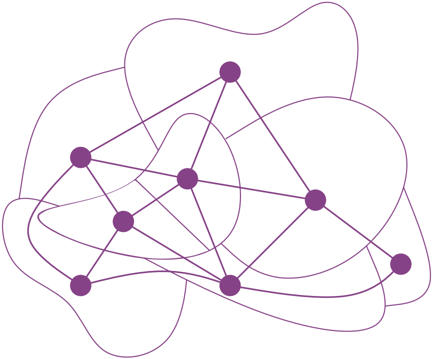
Problème nº 3 : La carte de Géographie



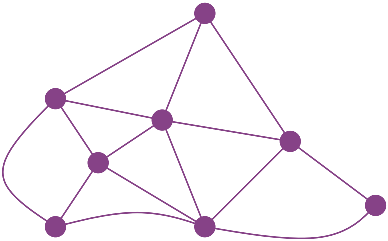
Problème n° 3 : La carte de Géographie



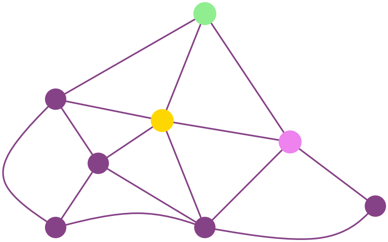
Problème n° 3 : La carte de Géographie



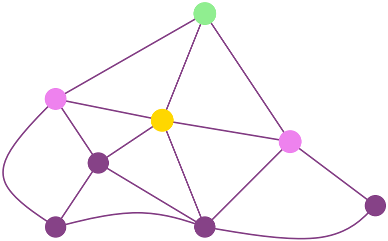
Problème n° 3 : La carte de Géographie



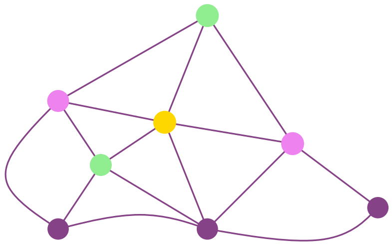
Problème n° 3 : La carte de Géographie



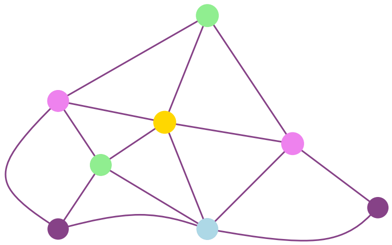
Problème n° 3 : La carte de Géographie



Problème n^{o} 3 : La carte de Géographie

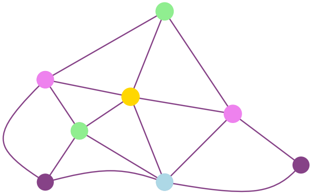


Problème n° 3 : La carte de Géographie



4 couleurs sont vraiment nécessaires

Problème n° 3 : La carte de Géographie

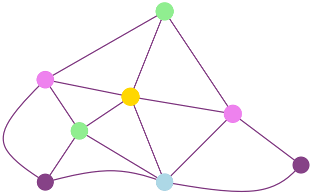


4 couleurs sont vraiment nécessaires

Question posée en 1852 :

Peut-on colorer tout graphe **planaire** avec seulement 4 couleurs ?
(planaire=on peut le dessiner sans que les arêtes ne se croisent)

Problème n° 3 : La carte de Géographie



4 couleurs sont vraiment nécessaires

Théorème des 4 couleurs (1976)

Peut-on colorer tout graphe **planaire** avec seulement 4 couleurs ?
(planaire=on peut le dessiner sans que les arêtes ne se croisent)
⇒ **Oui**

Preuve par Déchargement

Idée :

Preuve par Déchargement

Idée :

1. répartir des pièces de monnaie sur les arêtes et/ou les sommets.

Preuve par Déchargement

Idée :

1. répartir des pièces de monnaie sur les arêtes et/ou les sommets.
2. Compter les pièces

Preuve par Déchargement

Idée :

1. répartir des pièces de monnaie sur les arêtes et/ou les sommets.
2. Compter les pièces
3. établir des *règles de déchargement* : décider qui doit payer qui, et en quelle quantité.

Preuve par Déchargement

Idée :

1. répartir des pièces de monnaie sur les arêtes et/ou les sommets.
2. Compter les pièces
3. établir des *règles de déchargement* : décider qui doit payer qui, et en quelle quantité.
4. Recompter les pièces : la somme totale doit rester la même.

Preuve par Déchargement

Idée :

1. répartir des pièces de monnaie sur les arêtes et/ou les sommets.
2. Compter les pièces
3. établir des *règles de déchargement* : décider qui doit payer qui, et en quelle quantité.
4. Recompter les pièces : la somme totale doit rester la même.

$n = 8$ (*pair*)

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$$

Preuve par Déchargement

Idée :

1. répartir des pièces de monnaie sur les arêtes et/ou les sommets.
2. Compter les pièces
3. établir des *règles de déchargement* : décider qui doit payer qui, et en quelle quantité.
4. Recompter les pièces : la somme totale doit rester la même.

$n = 8$ (*pair*)

$$\overbrace{1 + 2 + 3 + 4}^{\leq \frac{n}{2}} \overbrace{+ 5 + 6 + 7 + 8}^{\geq \frac{n}{2}}$$

Preuve par Déchargement

Idée :

1. répartir des pièces de monnaie sur les arêtes et/ou les sommets.
2. Compter les pièces
3. établir des *règles de déchargement* : décider qui doit payer qui, et en quelle quantité.
4. Recompter les pièces : la somme totale doit rester la même.

$n = 8$ (*pair*)

$$\underbrace{0 + 0 + 0 + 0}^{\leq \frac{n}{2}} \overbrace{+ 9 + 9 + 9 + 9}^{\geq \frac{n}{2}}$$

Preuve par Déchargement

Idée :

1. répartir des pièces de monnaie sur les arêtes et/ou les sommets.
2. Compter les pièces
3. établir des *règles de déchargement* : décider qui doit payer qui, et en quelle quantité.
4. Recompter les pièces : la somme totale doit rester la même.

$n = 8$ (*pair*)

$$\overbrace{0+0+0+0}^{\leq \frac{n}{2}}\;\overbrace{+\underbrace{9+9+9+9}_{\frac{n}{2}\times(n+1)}}^{\geq \frac{n}{2}}$$

Preuve par Déchargement

Idée :

1. répartir des pièces de monnaie sur les arêtes et/ou les sommets.
2. Compter les pièces
3. établir des *règles de déchargement* : décider qui doit payer qui, et en quelle quantité.
4. Recompter les pièces : la somme totale doit rester la même.

$n = 9$ (*impair*)

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$$

Idée :

1. répartir des pièces de monnaie sur les arêtes et/ou les sommets.
2. Compter les pièces
3. établir des *règles de déchargement* : décider qui doit payer qui, et en quelle quantité.
4. Recompter les pièces : la somme totale doit rester la même.

$n = 9$ (*impair*)

$$\leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \qquad \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$$

Preuve par Déchargement

Idée :

1. répartir des pièces de monnaie sur les arêtes et/ou les sommets.
2. Compter les pièces
3. établir des *règles de déchargement* : décider qui doit payer qui, et en quelle quantité.
4. Recompter les pièces : la somme totale doit rester la même.

$n = 9$ (*impair*)

$$\overbrace{0+0+0+0}^{\leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 5 + \overbrace{10+10+10+10}^{\geq \lceil \frac{n}{2} \rceil}$$

Preuve par Déchargement

Idée :

1. répartir des pièces de monnaie sur les arêtes et/ou les sommets.
2. Compter les pièces
3. établir des *règles de déchargement* : décider qui doit payer qui, et en quelle quantité.
4. Recompter les pièces : la somme totale doit rester la même.

$n = 9$ (*impair*)

$$\overbrace{0+0+0+0}^{\leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} + \underset{\downarrow \atop \frac{n+1}{2}}{5} + \overbrace{\underbrace{10+10+10+10}_{\frac{n-1}{2} \times (n+1)}}^{\geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil}$$

Preuve par Déchargement

Idée :

1. répartir des pièces de monnaie sur les arêtes et/ou les sommets.
2. Compter les pièces
3. établir des *règles de déchargement* : décider qui doit payer qui, et en quelle quantité.
4. Recompter les pièces : la somme totale doit rester la même.

$n = 9$ (*impair*)

$$\overbrace{0+0+0+0}^{\leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + \underset{\frac{n+1}{2}}{5} + \overbrace{\underbrace{10+10+10+10}_{\frac{n-1}{2} \times (n+1)}}^{\geq \lceil \frac{n}{2} \rceil}$$

$$= (n+1)\left(\frac{1}{2} + \frac{n-1}{2}\right)$$

Preuve par Déchargement

Idée :

1. répartir des pièces de monnaie sur les arêtes et/ou les sommets.
2. Compter les pièces
3. établir des *règles de déchargement* : décider qui doit payer qui, et en quelle quantité.
4. Recompter les pièces : la somme totale doit rester la même.

$n = 9$ (*impair*)

$$\overbrace{0+0+0+0}^{\leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + \underbrace{5}_{\frac{n+1}{2}} + \overbrace{\underbrace{10+10+10+10}_{\frac{n-1}{2} \times (n+1)}}^{\geq \lceil \frac{n}{2} \rceil}$$

$$= (n+1)\frac{n}{2}$$

Encore plus de graphes :

Encore plus de graphes :

- **Réseaux sociaux :**
  - Sommets : personnes
  - Arêtes : les amis
  - Question : trouver les communautés, étudier la plus grande distance possible entre deux personnes...

Encore plus de graphes :

- **Réseaux sociaux :**
  - Sommets : personnes
  - Arêtes : les amis
  - Question : trouver les communautés, étudier la plus grande distance possible entre deux personnes...
- **Réseaux routiers :**
  - Sommets : villes (ou mieux : croisement de routes)
  - Arêtes : route directe entre deux villes (étiquettée par les km)
  - Question : trouver le chemin le plus court (GPS !), parcourir toutes les routes (voiture Google), parcourir toutes les villes (tournée de Kendji)...

Encore plus de graphes :

- **Réseaux sociaux :**
  - Sommets : personnes
  - Arêtes : les amis
  - Question : trouver les communautés, étudier la plus grande distance possible entre deux personnes...
- **Réseaux routiers :**
  - Sommets : villes (ou mieux : croisement de routes)
  - Arêtes : route directe entre deux villes (étiquettée par les km)
  - Question : trouver le chemin le plus court (GPS !), parcourir toutes les routes (voiture Google), parcourir toutes les villes (tournée de Kendji)...
- **Et aussi :** réseaux d'ordinateurs, théorie des jeux ...

2 types de questions :

Algorithmique	**Borne, garantie**
Peut-on calculer la coloration optimale en temps raisonnable ?	

2 types de questions :

Algorithmique	**Borne, garantie**
Peut-on calculer la coloration optimale en temps raisonnable ?	

$\Downarrow$

Non pour le cas général.

2 types de questions :

Algorithmique	Borne, garantie
Peut-on calculer la coloration optimale en temps raisonnable ?	

$\Downarrow$

Non pour le cas général.
Mais **Oui** pour les graphes d'intervalles.

2 types de questions :

Algorithmique	**Borne, garantie**
Peut-on calculer la coloration optimale en temps raisonnable ?	Peut-on s'assurer que 4 couleurs suffiront toujours si notre graphe est planaire ?

$\Downarrow$

Non pour le cas général.
Mais **Oui** pour les graphes d'intervalles.

2 types de questions :

Algorithmique	**Borne, garantie**
Peut-on calculer la coloration optimale en temps raisonnable ?	Peut-on s'assurer que 42 couleurs suffiront toujours si notre graphe est *gentil* ?

$\Downarrow$

Non pour le cas général.
Mais **Oui** pour les graphes d'intervalles.

Soit G un graphe.

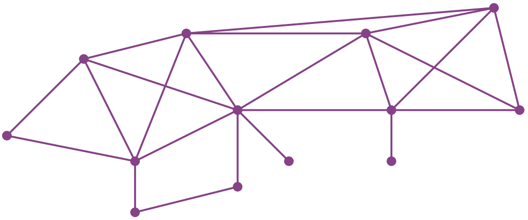
Soit G un graphe.

Nombre chromatique $\chi(G)=$ nombre minimal de couleurs nécessaires pour colorer G.

Soit G un graphe.

Nombre chromatique $\chi(G)$= nombre minimal de couleurs nécessaires pour colorer G.

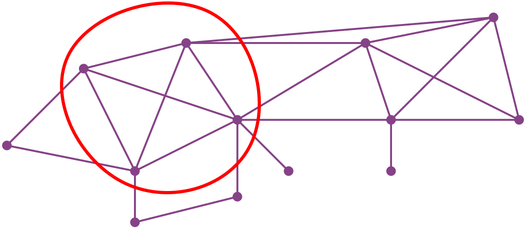
Une clique est un ensemble de sommets deux à deux adjacents. La taille de la plus grande clique est $\omega(G)$.



Soit G un graphe.

Nombre chromatique $\chi(G)=$ nombre minimal de couleurs nécessaires pour colorer G.

Une clique est un ensemble de sommets deux à deux adjacents. La taille de la plus grande clique est $\omega(G)$.

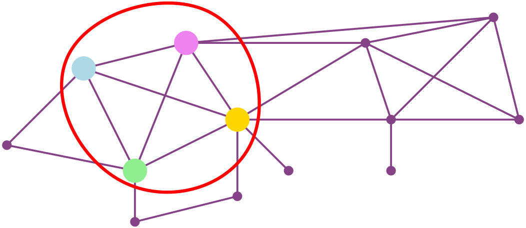


$\omega(G) = 4$

Soit G un graphe.

Nombre chromatique $\chi(G)$= nombre minimal de couleurs nécessaires pour colorer G.

Une clique est un ensemble de sommets deux à deux adjacents. La taille de la plus grande clique est $\omega(G)$.

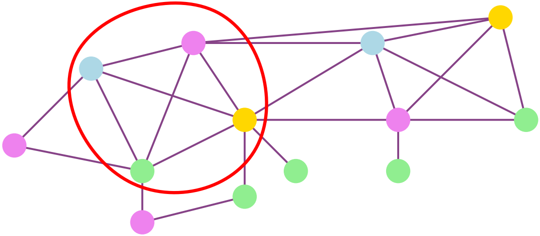


$\omega(G) = 4$ $\qquad$ $\chi(G) \geq \omega(G)$

Soit G un graphe.

Nombre chromatique $\chi(G)$= nombre minimal de couleurs nécessaires pour colorer G.

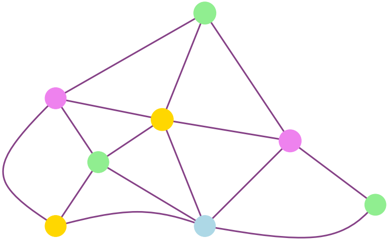
Une clique est un ensemble de sommets deux à deux adjacents. La taille de la plus grande clique est $\omega(G)$.



$\omega(G) = 4$ $\qquad$ $\chi(G) \geq \omega(G)$

Peut-on avoir besoin de plus de $\omega(G)$ couleurs ?
($=$ la clique max. n'est pas un témoin suffisant)

Peut-on avoir besoin de plus de $\omega(G)$ couleurs ?
(= la clique max. n'est pas un témoin suffisant)
$\Rightarrow$ **Oui**

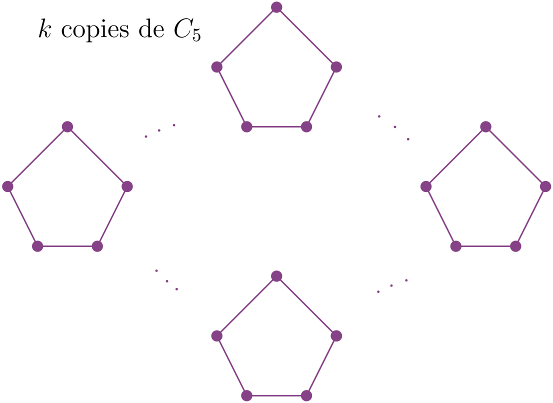


$\chi(G) = 4 > 3 = \omega(G)$

On peut même avoir un écart aussi grand que l'on veut !

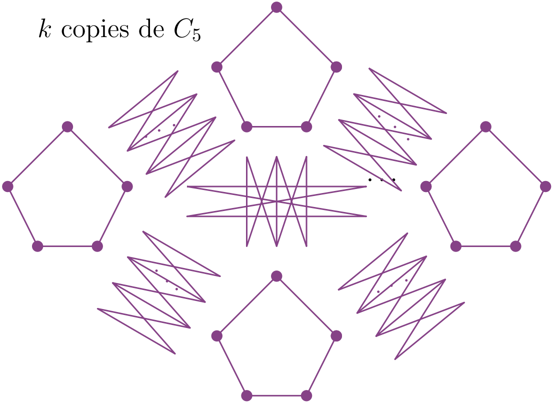
On peut même avoir un écart aussi grand que l'on veut !

k copies de C_5

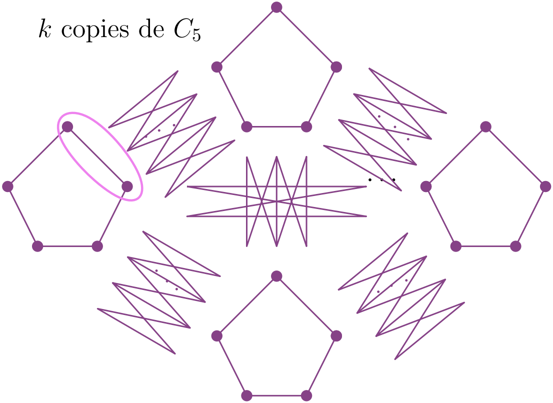


On peut même avoir un écart aussi grand que l'on veut !

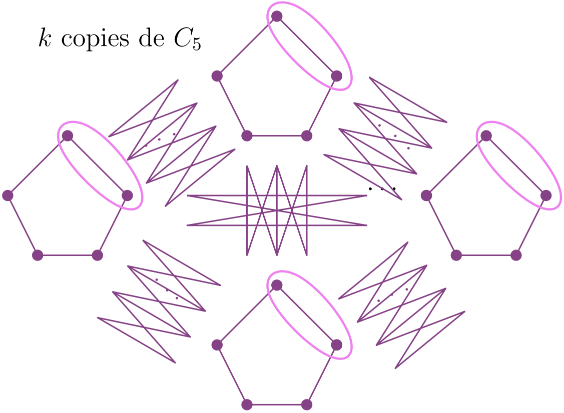
k copies de C_5



On peut même avoir un écart aussi grand que l'on veut !

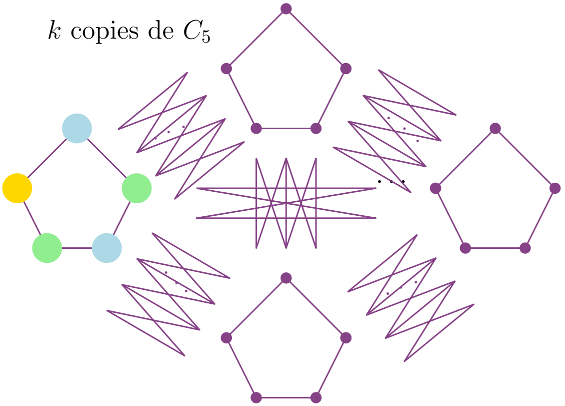


On peut même avoir un écart aussi grand que l'on veut !



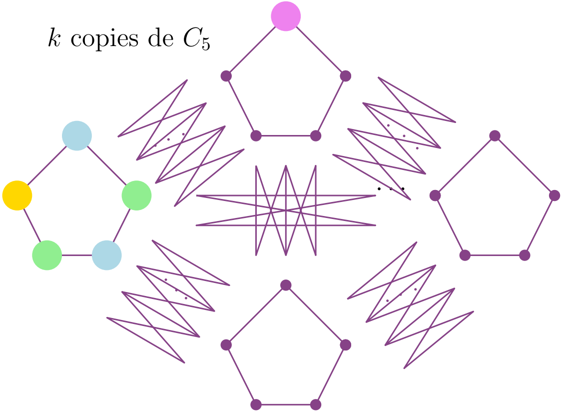
$\omega(G) = 2k$

On peut même avoir un écart aussi grand que l'on veut !



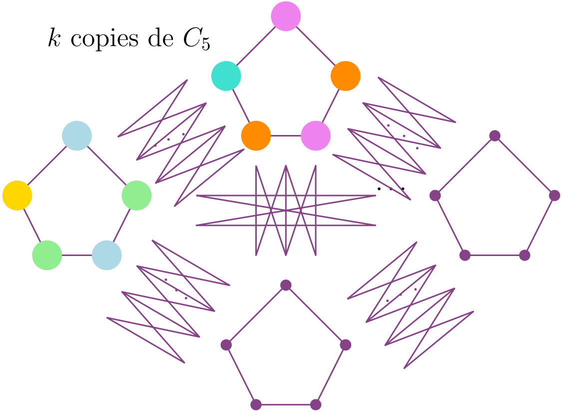
$\omega(G) = 2k$

On peut même avoir un écart aussi grand que l'on veut !



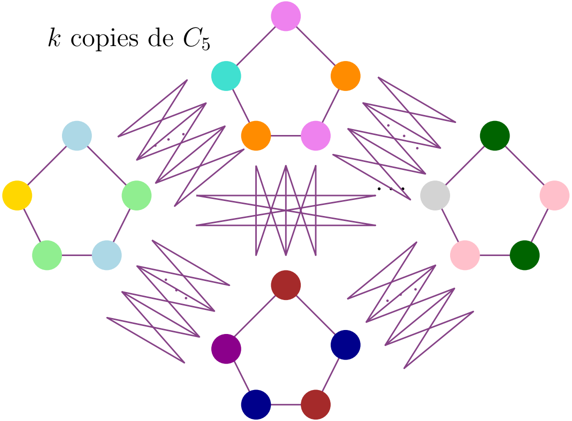
$\omega(G) = 2k$

On peut même avoir un écart aussi grand que l'on veut !



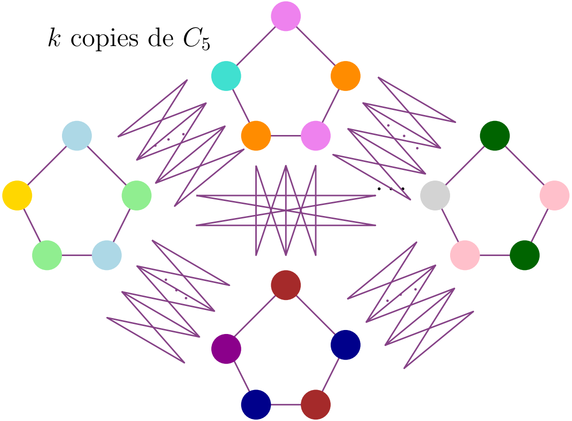
$\omega(G) = 2k$

On peut même avoir un écart aussi grand que l'on veut !



$\omega(G) = 2k$
$\chi(G) = 3k$

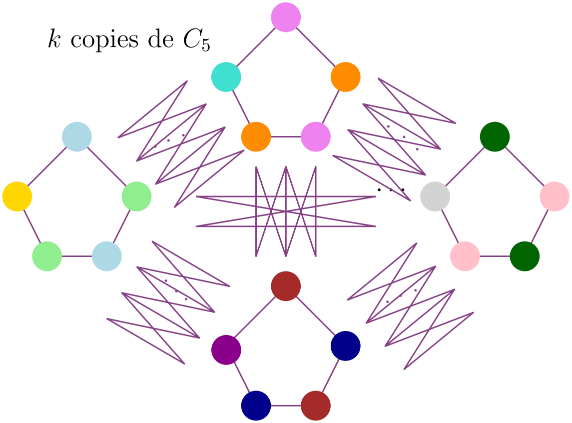
On peut même avoir un écart aussi grand que l'on veut !



$$\omega(G) = 2k$$
$$\chi(G) = 3k$$

$$\chi(G) - \omega(G) = k$$

On peut même avoir un écart aussi grand que l'on veut !



$$\omega(G) = 2k$$
$$\chi(G) = 3k$$

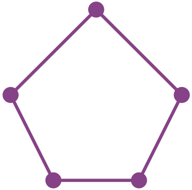
$$\chi(G) - \omega(G) = k$$

Théorème (encore plus fort)

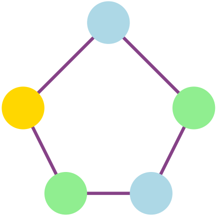
Pour tout entier k, il existe un graphe G tel que $\omega(G) = 2$ et $\chi(G) = k$.

Graphe parfait : si $\chi(G) = \omega(G)$

Graphe parfait : si $\chi(G) = \omega(G)$

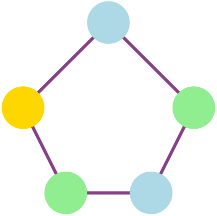


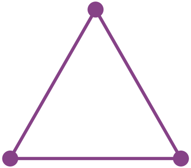
Graphe parfait : si $\chi(G) = \omega(G)$



$\omega(C_5) = 2 < 3 = \chi(C_5)$

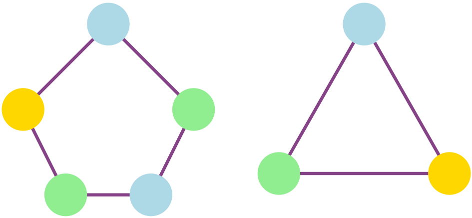
Graphe parfait : si $\chi(G) = \omega(G)$





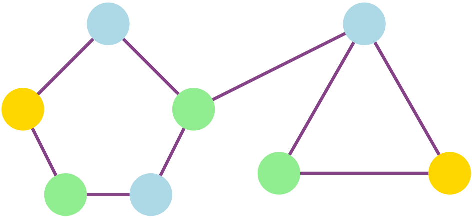
$\omega(C_5) = 2 < 3 = \chi(C_5)$

Graphe parfait : si $\chi(G) = \omega(G)$



$\omega(C_5) = 2 < 3 = \chi(C_5)$ $\qquad$ $\omega(K_3) = 3 = \chi(K_3)$

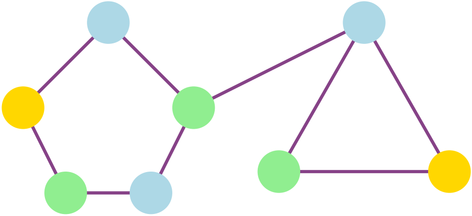
Graphe parfait : si $\chi(G) = \omega(G)$



$\omega(C_5) = 2 < 3 = \chi(C_5)$ $\omega(K_3) = 3 = \chi(K_3)$

$\omega(G) = 3 = \chi(G)$

Graphe parfait : si $\chi(G) = \omega(G)$

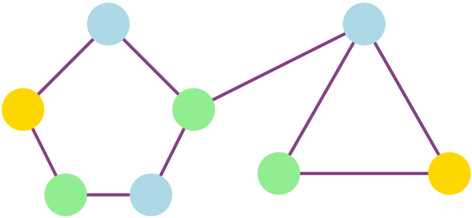


$\omega(C_5) = 2 < 3 = \chi(C_5)$ $\qquad$ $\omega(K_3) = 3 = \chi(K_3)$

$$\omega(G) = 3 = \chi(G)$$

G est parfait ? ! $\Rightarrow$ Mauvaise définition

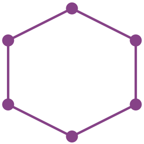
Graphe parfait : si $\chi(G) = \omega(G)$
et si $\chi(H) = \omega(H)$ pour tous les sous-graphes H de G.



$$\omega(C_5) = 2 < 3 = \chi(C_5) \qquad \omega(K_3) = 3 = \chi(K_3)$$

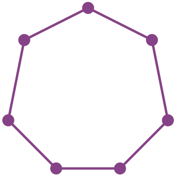
$$\omega(G) = 3 = \chi(G)$$

G n'est pas parfait car il contient un C_5 non-parfait.

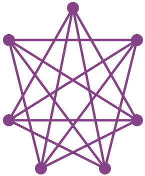


Cycle pair

Parfait

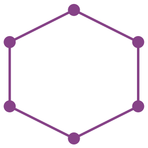


Trou impair

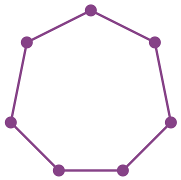


Anti-trou impair

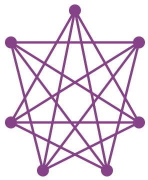
Non parfaits



Cycle pair
Parfait



Trou impair

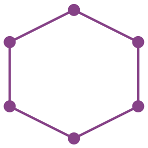


Anti-trou impair

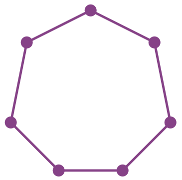
Non parfaits

Théorème des graphes parfaits (2002)

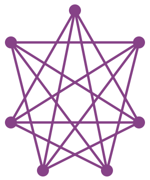
Un graphe est parfait si et seulement si il ne contient aucun trou impair ni aucun anti-trou impair.



Cycle pair
Parfait



Trou impair



Anti-trou impair

Non parfaits

Théorème des graphes parfaits (2002)

Un graphe est parfait si et seulement si il ne contient aucun trou impair ni aucun anti-trou impair.

Théorème

Il existe un algorithme pour colorer optimalement les graphes parfaits en temps raisonnable.

Merci !