

Optimisation Combinatoire et Graphes
Exercices et Solutions

Zoltán Szigeti
Myriam Preissmann

30 avril 2018

Table des matières

1	Graphes non orientés	5
1.1	Exercices d'échauffement	8
1.2	Chaînes, cycles	17
1.3	Connexité	24
1.4	Graphes hamiltoniens	28
1.5	Graphes eulériens	32
1.6	Coloration	39
1.7	Arbres	60
1.8	Arbre couvrant de coût minimum	68
2	Graphes orientés	89
2.1	Degré	91
2.2	Chemins, Circuits	94
2.3	Graphes orientés sans circuit	101
2.4	Arborescences et l'algorithme de Marquage Orienté	104
2.5	Algorithmes spécifiques de Marquage Orienté	114
2.6	Arborescences : paquage et recouvrement	121
2.7	Arborescence couvrante de coût minimum	124
2.8	Graphes orientés eulériens	134
2.9	Forte connexité	138
2.10	Tournois	152
2.11	Plus courts chemins	155
2.12	Applications des plus courts chemins	183
2.13	Ordonnancement	187

Chapitre 1

Graphes non orientés

Un **graphe (non orienté)** G est constitué de deux ensembles : un ensemble fini et non vide V dont les éléments sont appelés **sommets**, et un ensemble fini E dont les éléments sont appelés **arêtes**. A chaque arête est associée une paire (non ordonnée) de sommets de G non nécessairement distincts. On note $G = (V, E)$. Généralement, étant donné un graphe G , on notera $V(G)$ l'ensemble de ses sommets, $E(G)$ l'ensemble de ses arêtes, n le nombre de ses sommets et m le nombre de ses arêtes. Si les sommets u et v sont associés à l'arête e alors on dit que e **relie** (ou **connecte**) u et v et que les **extrémités** de e sont u et v , on dira aussi que u et v sont **adjacents** ou **voisins**. Une arête e est **incidente** à un sommet v si v est une extrémité de e . Deux arêtes incidentes à un même sommet sont **adjacentes**. Un sommet est **isolé** s'il n'existe pas d'arête incidente à ce sommet. Une arête dont les extrémités sont égales est appelée **boucle**. Une arête e s'appelle **multiple** s'il existe une autre arête $e' \neq e$ reliant les mêmes sommets que e ; dans ce cas on dira aussi que e et e' sont **parallèles**. Un **graphe simple** est un graphe sans boucle et sans arête multiple. Dans le cas d'un graphe simple chaque arête e est caractérisée par ses deux extrémités distinctes; si les extrémités de e sont u et v on notera $e = uv$ ou indifféremment $e = vu$.

On peut représenter un graphe par un dessin : à chaque sommet est associé un point et à chaque arête est associée une courbe qui relie ses extrémités et qui ne passe par aucun autre sommet du graphe. Voir l'exemple de la FIG. 1.1.

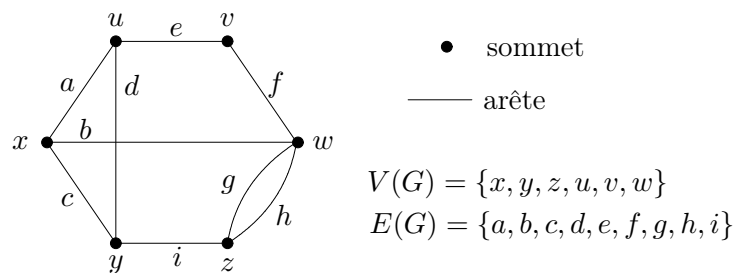


FIGURE 1.1 – Un graphe non-orienté G .

Dans un graphe G sans boucle, le nombre d'arêtes incidentes à un sommet u de G est appelé **degré** de u dans G , on le note $d_G(u)$ ou $d(u)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté. Étant donné un sous-ensemble X de sommets de G , le **degré** de X noté $d_G(X)$ (ou $d(X)$) est le nombre d'arêtes entre X et $V \setminus X$, autrement dit $d(X) = |\delta(X)|$. Remarquons que si X contient un seul sommet u alors le degré de X et le degré de u sont égaux, c'est à dire $d(\{u\}) = d(u)$. Pour deux ensembles

X et Y de sommets de G , $d(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ dénote le nombre d'arêtes entre les deux ensembles $X \setminus Y$ et $Y \setminus X$. Le degré maximum de G est noté $\Delta(\mathbf{G}) = \max\{d(v) : v \in V\}$. Le graphe G est dit k -régulier si $d(v) = k$ pour chaque sommet v de G .

Remarque 1 Si G est un graphe simple à n sommets alors pour chaque sommet v de G on a

$$0 \leq d(v) \leq n - 1.$$

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Soit $X \subseteq V$. L'ensemble des sommets de $V \setminus X$ qui ont au moins un voisin dans X est appelé **voisinage** de X et est noté $N_G(\mathbf{X})$. Notons que si G est simple, alors $d_G(X) = |N_G(X)|$. On appelle **sous-graphe de G induit par X** , le graphe noté $G[\mathbf{X}]$ dont l'ensemble des sommets est égal à X et où deux sommets sont reliés s'ils sont reliés dans G ; en d'autres termes $G[\mathbf{X}] = (X, E')$ avec $E' = \{e = uv \in E : u \in X, v \in X\}$ (FIG. 1.2 (a)). Étant donné $F \subseteq E$, on appelle **graphe partiel de G induit par F** , le graphe noté $G(\mathbf{F})$ dont l'ensemble des sommets est égal à V et dont l'ensemble des arêtes est égal à F ; en d'autres termes $G(\mathbf{F}) = (V, F)$ (FIG. 1.2 (b)). Un graphe partiel d'un sous-graphe de G est un **sous-graphe partiel** de G (FIG. 1.2 (c)).

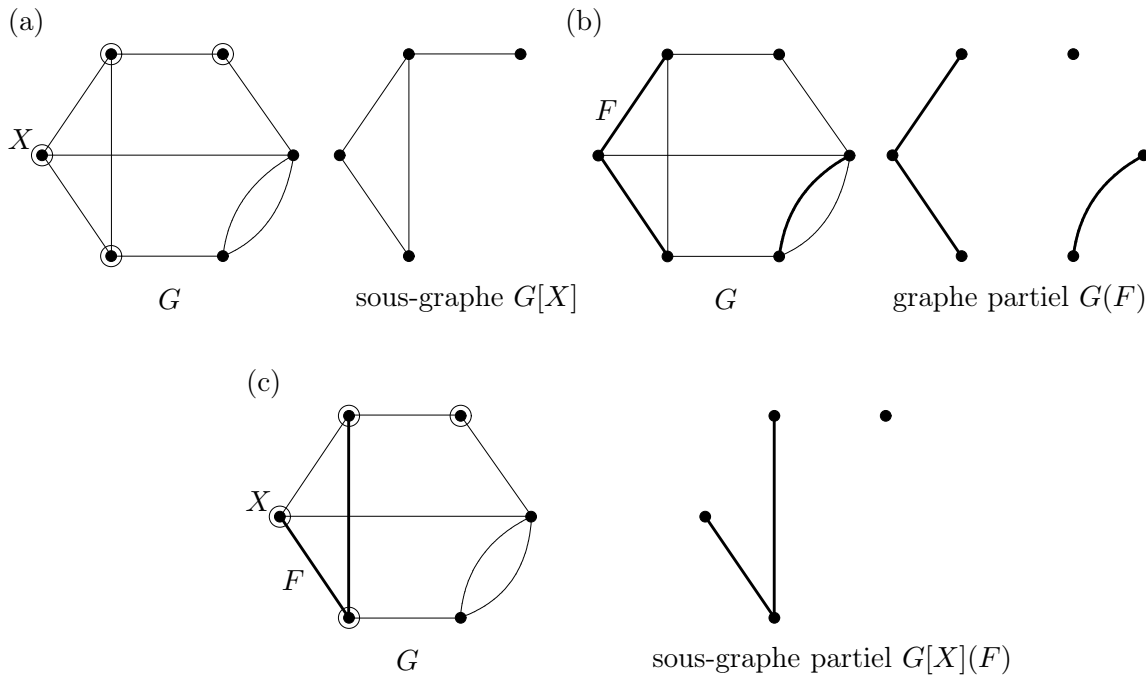


FIGURE 1.2 – (a) un sous-graphe, (b) un graphe partiel, (c) un sous-graphe partiel.

Pour un ensemble $S \subseteq V$, la **coupe définie par S** est l'ensemble des arêtes de G reliant S et $V \setminus S$, on la note $\delta_G(\mathbf{S})$ ou $\delta(\mathbf{S})$ s'il n'y a pas d'ambiguïté (FIG. 1.3). On remarque que par la symétrie de la définition, $\delta_G(S) = \delta_G(V \setminus S)$. On dira qu'un ensemble Q d'arêtes de G est une **coupe de G** s'il existe une partition des sommets en deux sous-ensembles S et $V \setminus S$ telle que Q est l'ensemble des arêtes de G reliant S et $V \setminus S$.

Soit X un sous-ensemble de sommets de G , le graphe obtenu à partir de G par **suppression de X** , noté $G - X$, est le graphe $G[V \setminus X]$. Si $X = \{v\}$, alors on pourra écrire $G - v$ à la place de $G - \{v\}$. Le graphe obtenu à partir de G par **contraction de X** , noté G/X , est le graphe dont l'ensemble des sommets est égal à $(V \setminus X) \cup \{x\}$ où x est un nouveau sommet, et dont

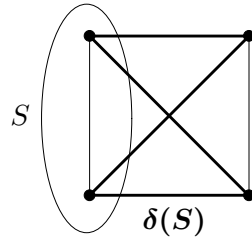


FIGURE 1.3 – Les arêtes en gras représentent la coupe définie par S .

l'ensemble des arêtes s'obtient à partir de E en supprimant les arêtes dont les deux extrémités appartiennent à X et en remplaçant chaque arête d'extrémités $u \in X$ et $v \in V \setminus X$ par une arête d'extrémités x et v . (FIG. 1.4)

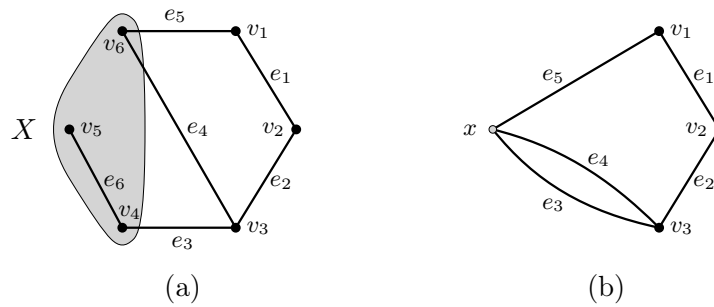


FIGURE 1.4 – (a) Un graphe G et un ensemble de sommets X , (b) le graphe contracté G/X .

Remarque 2 *Le graphe contracté peut avoir des arêtes multiples même si le graphe initial n'en avait pas.*

Soit F un sous-ensemble d'arêtes de G , le graphe obtenu à partir de G par **suppression de F** , noté $G - F$ est le graphe $G(E \setminus F)$. Si $F = \{e\}$, alors on pourra écrire $G - e$ à la place de $G - \{e\}$. Soient x et y deux sommets de G , on note $G + xy$ le graphe obtenu à partir de G en ajoutant une arête d'extrémités x et y .

Une **étoile** est un graphe simple dont l'ensemble des arêtes relie un sommet particulier à tous les autres sommets. Le **graphe complet** à n sommets noté K_n est le graphe simple à n sommets dont toutes les paires de sommets sont reliées par une arête (FIG 1.5).

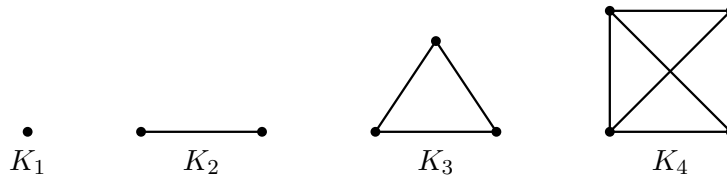


FIGURE 1.5 – Les graphes complets à 1, 2, 3 et 4 sommets.

On dit que deux graphes simples $G = (V, E)$ et $H = (V', E')$ sont **isomorphes** s'il existe une bijection $\varphi : V \rightarrow V'$ telle que $uv \in E$ si et seulement si $\varphi(u)\varphi(v) \in E'$.

Le **complémentaire** \overline{G} d'un graphe simple $G = (V, E)$ est le graphe $\overline{G} := (V, E')$ où $uv \in E'$ si et seulement si $uv \notin E$, pour tout couple (u, v) de sommets de G .

Remarque 3 Puisque le graphe induit par la réunion disjointe des arêtes de G et de \overline{G} est un graphe complet à n sommets, pour chaque sommet v de G , le nombre d'arêtes de G incidentes à v plus le nombre d'arêtes de \overline{G} incidentes à v est égal à $n - 1$, c'est-à-dire $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n - 1$.

Pour $n \geq k \geq 0$, C_n^k dénote le nombre de sous-ensembles à k éléments d'un ensemble à n éléments. On rappelle que $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

1.1 Exercices d'échauffement

Exercice 1 (a) Quels graphes sont-ils isomorphes parmi ceux de la FIG. 1.6 ?

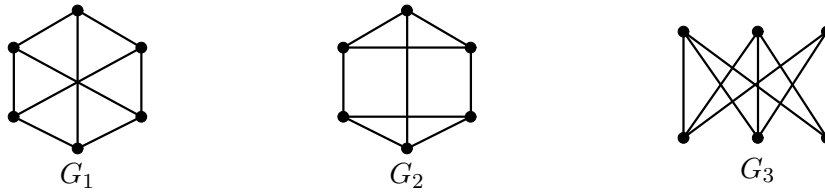


FIGURE 1.6 – Les graphes G_1, G_2 et G_3 .

(b) Même question pour les graphes de la FIG. 1.7.

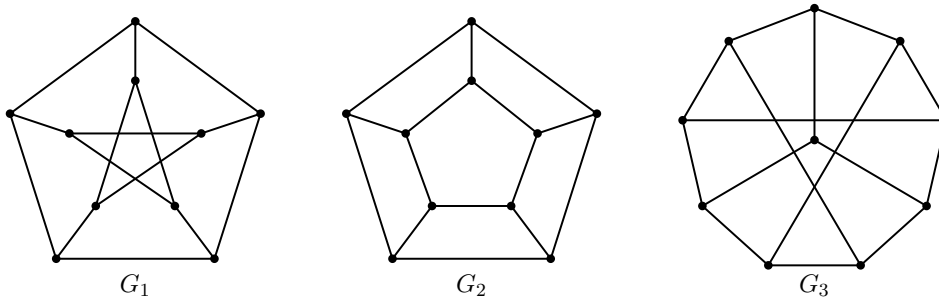


FIGURE 1.7 – Les graphes G_1, G_2 et G_3 .

Solution (a) G_1 et G_3 sont isomorphes comme le montre la FIG. 1.8.

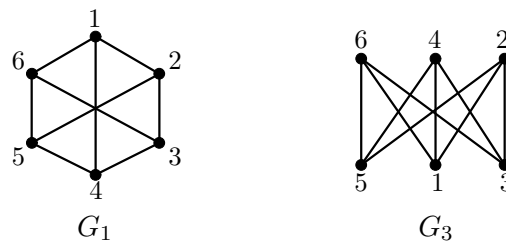
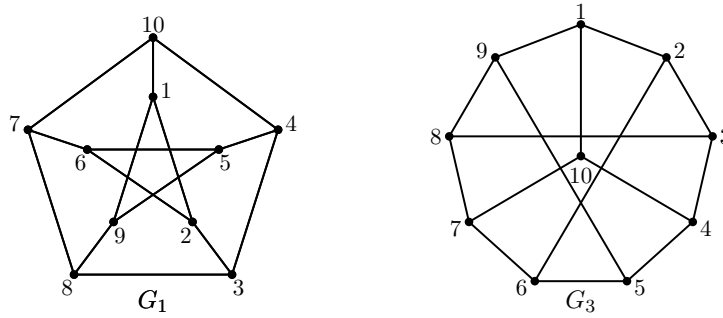


FIGURE 1.8 – La bijection qui montre l'isomorphisme de G_1 et G_3 .

Par contre, G_1 et G_2 ne sont pas isomorphes : G_1 ne contient pas de K_3 alors que G_2 en contient. Par conséquent, puisque G_1 et G_3 sont isomorphes, G_2 et G_3 ne le sont pas.

(b) G_1 et G_3 sont isomorphes comme le montre la FIG. 1.9.

FIGURE 1.9 – La bijection qui montre l'isomorphisme de G_1 et G_3 .

Par contre, G_1 et G_2 ne sont pas isomorphes : G_1 ne contient pas de deux sommets non adjacents qui ont deux voisins communs alors que G_2 en contient. Par conséquent, puisque G_1 et G_3 sont isomorphes, G_2 et G_3 ne le sont pas. \square

Exercice 2 Pour chacune des suites indiquées ci-dessous, décider si elle représente la liste des degrés des sommets d'un graphe simple.

- (a) 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1,
- (b) 6, 6, 5, 4, 3, 3, 1,
- (c) 3, 3, 2, 1, 1,
- (d) 3, 3, 2, 2,
- (e) 5, 4, 3, 1, 1, 1, 1,
- (f) 4, 2, 1, 1, 1, 1,
- (g) 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6,
- (h) 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3.

Solution (a) Non. En effet, cette suite contient 7 valeurs, un tel graphe aurait donc 7 sommets et, d'après la Remarque 1, le degré de chaque sommet serait inférieur ou égal à 6, or cette suite contient 7.

(b) Non. En effet, cette suite contient 7 valeurs, un tel graphe aurait alors 7 sommets dont deux de degré 6. Chacun de ces deux sommets serait donc relié à tous les sommets (sauf lui-même), ainsi tous les sommets seraient de degré supérieur ou égal à 2; or cette suite contient la valeur 1, on aboutit à une contradiction.

(c) Oui : voir FIG. 1.10 (c).

(d) Oui : voir FIG. 1.10 (d).

(e) Non. Supposons par l'absurde que G est un graphe simple tel que les degrés de G soient 5, 4, 3, 1, 1, 1, 1. Par l'Exercice 4, le nombre d'arêtes de G est égal à la somme des degrés des sommets divisée par 2, donc 8. En supprimant les quatre sommets de degré 1 on supprime au plus quatre arêtes. Il reste donc trois sommets et au moins quatre arêtes, ce qui est impossible dans un graphe simple.

(f) Oui : voir FIG. 1.10 (f).

(g) Non, car il y a trois nombres impairs dans cette suite or, par l'Exercice 5, dans un graphe le nombre de sommets de degré impair est pair.

(h) Oui, voir FIG. 1.10 (h).

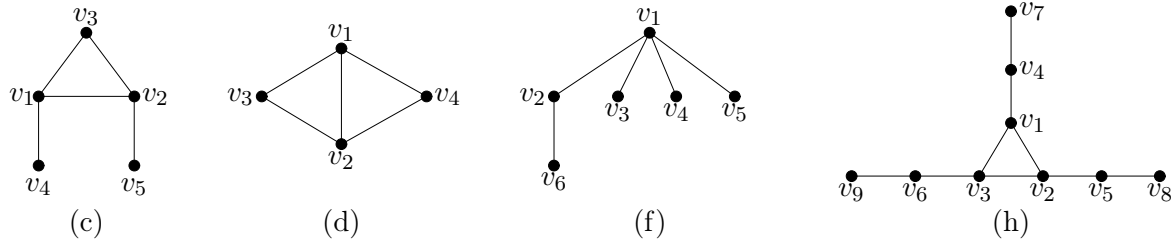


FIGURE 1.10 – Les graphes simples dont les degrés correspondent aux suites indiquées. \square

Exercice 3 Montrer qu'un graphe simple ayant au moins deux sommets contient deux sommets de même degré.

Solution Soit G un graphe simple avec $n \geq 2$ sommets. Par la Remarque 1, il y a n valeurs possibles pour le degré d'un sommet de G : $0, 1, \dots, n-1$. Si tous les sommets sont de degrés différents, alors pour chaque $0 \leq i \leq n-1$ on a un sommet v_i de degré i . Ceci est impossible. En effet, considérons les sommets v_0 et v_{n-1} . Puisque $0 \neq n-1$, ces sommets sont distincts. De plus : d'une part $v_0 v_{n-1}$ ne peut pas être une arête car v_0 n'est relié à aucun sommet, et d'autre part $v_0 v_{n-1}$ doit être une arête car v_{n-1} est relié à tous les sommets. \square

Remarque 4 L'énoncé de l'exercice précédent peut être exprimé de la manière suivante : dans un groupe d'au moins deux individus, il y a toujours deux qui ont le même nombre d'amis (en supposant que l'amitié est une relation symétrique). En effet, la relation d'amitié dans le groupe peut être modélisée par un graphe : les sommets sont les individus et deux sommets sont reliés par une arête si les deux individus correspondants sont amis.

Exercice 4 Montrer que la somme des degrés des sommets d'un graphe $G = (V, E)$ est égale à deux fois le nombre d'arêtes, c'est-à-dire

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Solution Calculer la somme des degrés des sommets d'un graphe G revient à compter les arêtes incidentes à chaque sommet et puis à ajouter ces nombres. Chaque arête uv est comptée exactement deux fois dans la somme : une fois dans $d(u)$ et une autre fois dans $d(v)$. \square

Exercice 5 Soit G un graphe. Montrer que le nombre de sommets de G de degré impair est pair.

Solution Soit s_1 la somme des degrés des sommets de degré pair et s_2 la somme des degrés des sommets de degré impair. Une somme de nombres pairs est paire, donc s_1 est un nombre pair. On a $s_1 + s_2$ égal à la somme des degrés des sommets de G , laquelle d'après l'Exercice 4, est paire. On en déduit que s_2 est un nombre pair. Or une somme de nombres impairs n'est paire que si le nombre de termes de cette somme est pair. \square

Exercice 6 (a) Montrer que le nombre d'arêtes d'un graphe complet K_n à $n \geq 2$ sommets est égal à $\frac{n(n-1)}{2}$.

(b) Montrer que le nombre de K_3 d'un graphe complet K_n à $n \geq 3$ sommets est égal à $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

Solution (a) *Première démonstration* : Le nombre d'arêtes de K_n est égal au nombre de sous-ensembles à 2 éléments d'un ensemble à n éléments, qui est par définition, $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

Deuxième démonstration : Puisque chacun des n sommets de K_n est de degré $n - 1$, la somme des degrés des sommets est égale à $n(n - 1)$ et aussi, par l'Exercice 4, à deux fois le nombre d'arêtes de K_n .

(b) Le nombre de K_3 de K_n est égal au nombre de sous-ensembles à 3 éléments d'un ensemble à n éléments, qui est par définition, $C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. \square

Exercice 7 Combien de graphes simples distincts peut-on définir sur n sommets donnés ?

Solution Pour construire un graphe G simple sur n sommets donnés, il faut décider pour chaque paire de sommets u et v si l'on prend ou non l'arête uv . On a donc deux choix possibles pour chaque paire, et ces choix sont indépendants. Comme le nombre de paires de sommets est C_n^2 , on peut construire exactement $2^{C_n^2}$ graphes simples différents sur n sommets donnés. \square

Exercice 8 Décrire l'ensemble \mathcal{G} des graphes G simples sans sommet isolé tels que

$$\text{les arêtes de } G \text{ sont mutuellement adjacentes.} \quad (1.1)$$

Solution Nous allons montrer qu'un graphe G est dans \mathcal{G} si et seulement si G est soit un K_3 soit une étoile. Remarquons que ces graphes appartiennent à \mathcal{G} . Il reste à montrer que ce sont les seuls. Soit $G \in \mathcal{G}$. Une arête étant une étoile, on peut supposer que G possède deux arêtes e et f . Par (1.1), ces arêtes ont une extrémité commune, on note $e = uv, f = uw$. Par (1.1), pour toute autre arête g de G , comme elle est adjacente mais pas parallèle à e et à f , soit g est incidente à u et dans ce cas vw ne peut pas exister, soit $g = vw$. Par hypothèse, G est sans sommet isolé et donc G est une étoile ou $G = K_3$. \square

Exercice 9 Montrer que pour un sous-ensemble X de sommets d'un graphe G on a

$$d(X) = \sum_{v \in X} d(v) - 2|E(G[X])|.$$

Solution Quand on fait la somme des degrés des sommets dans X , chaque arête de G est comptée autant de fois qu'elle a d'extrémités dans X . Puisque les arêtes de $G[X]$ ont deux extrémités dans X et que les arêtes de $\delta(X)$ ont une extrémité dans X , on obtient :

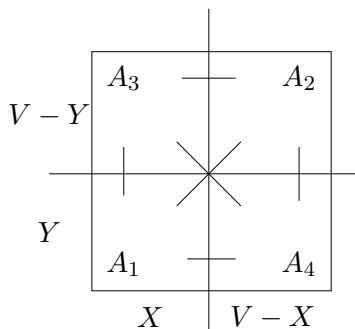
$$\sum_{v \in X} d(v) = 2|E(G[X])| + |\delta(X)|. \quad \square$$

Exercice 10 Soient G un graphe simple contenant au moins une arête et $k \geq 2$ un entier. Montrer que si pour tout sous-ensemble X de sommets de G , $d(X)$ est un multiple de k , alors $k = 2$.

Solution Soit uv une arête de G . D'après l'Exercice 9,

$$2 = 2|E(G[\{u, v\}])| = d(u) + d(v) - d(\{u, v\}).$$

Par hypothèse $d(u), d(v)$ et $d(\{u, v\})$ sont multiples de k , donc 2 aussi est multiple de k et alors, $k \geq 2$ implique que $k = 2$. \square

FIGURE 1.11 – Les ensembles A_1, A_2, A_3, A_4 .

Exercice 11 Soient X et Y deux sous-ensembles de sommets d'un graphe G . Montrer que

$$d(X) + d(Y) = d(X \cap Y) + d(X \cup Y) + 2d(X, Y). \quad (1.2)$$

Solution Soient $A_1 := X \cap Y$, $A_2 := V(G) \setminus (X \cup Y)$, $A_3 := X \setminus Y$, $A_4 := Y \setminus X$. Dénotons par $d_{ij} = d_{ji}$ le nombre d'arêtes entre A_i et A_j . Voir FIG. 1.11.

Alors on voit que

$$\begin{aligned} d(X) &= d_{12} + d_{14} + d_{32} + d_{34} \\ d(Y) &= d_{12} + d_{13} + d_{42} + d_{43} \\ d(X \cap Y) &= d_{12} + d_{13} + d_{14} \\ d(X \cup Y) &= d_{12} + d_{32} + d_{42} \\ 2d(X, Y) &= d_{34} + d_{43} \end{aligned}$$

d'où vient l'égalité (1.2). □

Remarque 5 Dans un graphe G ayant $n \geq 2$ sommets, ou bien tous les sommets sont deux à deux adjacents et alors G est un graphe complet K_n , ou bien il existe deux sommets non-adjacents et alors \overline{G} contient une arête c'est-à-dire un K_2 .

Exercice 12 (Théorème de Ramsey : K_3, K_3)

- (a) Montrer que dans un groupe composé d'au moins 6 individus, ou bien il y a 3 individus qui se connaissent mutuellement, ou bien il y a 3 individus qui ne se connaissent pas du tout, ou les deux. (On suppose que si un individu A connaît un individu B , alors B connaît A .)
- (b) La propriété de (a) reste-t-elle vraie pour un groupe de 5 individus ?

Solution La relation de connaissance dans le groupe peut être modélisée par un graphe : les sommets sont les individus et deux sommets sont reliés par une arête si les deux individus correspondants se connaissent.

(a) L'énoncé de (a) s'exprime alors de la manière suivante : Montrer que pour un graphe G simple ayant $n \geq 6$ sommets, au moins l'un des deux graphes G ou \overline{G} possède un K_3 . Soit v un sommet quelconque de G . Par la Remarque 3, le nombre d'arêtes de G incidentes à v plus le nombre d'arêtes de \overline{G} incidentes à v est égal à $n - 1 \geq 5$. Par conséquent, dans l'un des deux

graphes G et \overline{G} , il y a au moins trois arêtes incidentes à v . Supposons, sans perte de généralité, que c'est dans G , et soient donc vu_1, vu_2, vu_3 , trois arêtes de G . Deux cas sont possibles (FIG. 1.12) :

Cas 1 : Il existe $1 \leq i < j \leq 3$ tels que G contient l'arête u_iu_j . Alors le sous-graphe de G induit par les sommets v, u_i, u_j est un K_3 .

Cas 2 : Pour tous $1 \leq i < j \leq 3$ l'arête u_iu_j est contenue dans \overline{G} . Alors le sous-graphe de \overline{G} induit par les sommets u_1, u_2, u_3 est un K_3 .

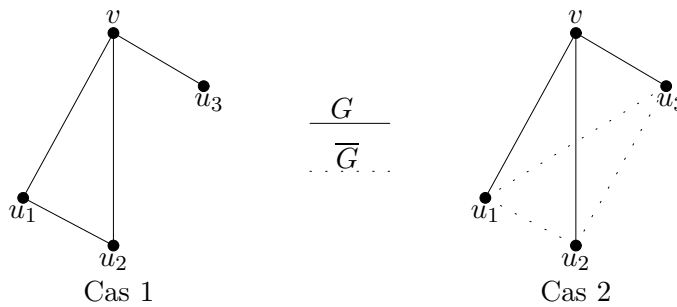


FIGURE 1.12 – Les deux cas de la démonstration.

(b) Non. On peut construire un graphe à 5 sommets tel que G et \overline{G} soient sans K_3 . Voir FIG. 1.13.

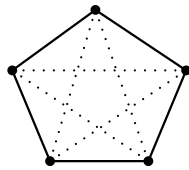


FIGURE 1.13 – Le graphe C_5 et son complémentaire $\overline{C_5}$ sont sans K_3 .

Exercice 13 (Théorème de Ramsey : K_3, K_4)

- (a) Soit G un graphe simple ayant $n \geq 10$ sommets. Montrer que, ou bien G contient un K_3 , ou bien \overline{G} contient un K_4 , ou les deux.
- (b) Même question pour un graphe simple ayant 9 sommets.
- (c) Construire un graphe G à 8 sommets tel que G soit sans K_3 et \overline{G} soit sans K_4 .

Solution (a) Soit v un sommet quelconque de G . Puisque, par la Remarque 3, $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n - 1 \geq 9$, on a $d_G(v) \geq 4$ (Cas I) ou $d_{\overline{G}}(v) \geq 6$ (Cas II).

Cas I : On considère le sous-graphe G_4 de G induit par 4 voisins de v dans G . S'il existe une arête uw dans G_4 , alors les sommets u, w, v induisent un K_3 dans G . Sinon, \overline{G}_4 est un K_4 dans \overline{G} .

Cas II : On considère le sous-graphe G_6 de G induit par 6 voisins de v dans \overline{G} . D'après l'Exercice 12, ou bien G_6 (et ainsi G) contient un K_3 , ou bien \overline{G}_6 contient un K_3 dont l'ensemble des sommets avec le sommet v induisent un K_4 de \overline{G} .

(b) Supposons par l'absurde qu'il existe un graphe G à 9 sommets sans K_3 dont le complémentaire \overline{G} est sans K_4 . D'après la démonstration de (a), pour chaque sommet v de G , $d_G(v) \leq 3$

et $d_{\overline{G}}(v) \leq 5$. De plus, par la Remarque 3, $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = 8$ et donc tout sommet de G doit être de degré 3. Puisque le nombre de sommets de G est 9 qui est un nombre impair, d'après l'Exercice 5, c'est une contradiction.

(c) Soit G le graphe à 8 sommets représenté sur la FIG. 1.14. Aucune arête n'existe entre deux voisins d'un même sommet, donc le graphe G est sans K_3 . Dans \overline{G} (le graphe en pointillé sur la FIG. 1.14), aucun K_3 n'existe dans le voisinage d'un même sommet, donc le graphe \overline{G} est sans K_4 .

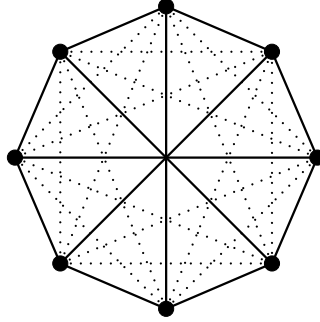


FIGURE 1.14 – Un graphe à 8 sommets sans K_3 dont le complémentaire en pointillé est sans K_4

Exercice 14 (Théorème de Ramsey : K_{k+1}, K_{l+1})

(a) Montrer que si $n \geq k \geq 1$, alors $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

(b) Soit G un graphe simple ayant $n \geq C_{k+l}^k$ sommets où k et l sont des entiers positifs.

Montrer que, ou bien G contient un K_{k+1} , ou bien \overline{G} contient un K_{l+1} , ou les deux.

Solution (a) L'ensemble des sous-ensembles à k éléments d'un ensemble à n éléments est égal à l'union disjointe de ceux qui contiennent un élément donné et de ceux qui ne le contiennent pas. Or le cardinal du premier ensemble est égal à C_{n-1}^{k-1} et le cardinal du deuxième ensemble est égal à C_{n-1}^k , d'où l'égalité.

(b) On commence par vérifier que (b) est vrai pour k ou l égal à 1. Pour $k = 1$ et $l \geq 1$: G a $n \geq C_{1+l}^1 = 1 + l \geq 2$ sommets, par la Remarque 5 appliquée à \overline{G} , on obtient (b). Pour $k \geq 1$ et $l = 1$: G a $n \geq C_{k+1}^1 = k + 1 \geq 2$ sommets, par la Remarque 5 appliquée à G , on obtient (b).

Pour montrer le cas général, on procède par récurrence sur $p = k + l$. Pour $p = 2 = 1 + 1$, l'énoncé est déjà vérifié. Supposons que l'énoncé soit vrai pour tous k' et l' tels que $k' + l' \leq p$. Considérons maintenant k et l tels que $k + l = p + 1$. Par ce qui précède il suffit de considérer le cas où $k, l \geq 2$. Soit G un graphe ayant $n \geq C_{k+l}^k$ sommets. Pour un sommet quelconque v de G , par la Remarque 3 et par (a),

$$d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n - 1 \geq C_{k+l}^k - 1 = C_{k+l-1}^{k-1} + C_{k+l-1}^k - 1,$$

on a $d_G(v) \geq C_{k+l-1}^{k-1}$ (Cas I) ou $d_{\overline{G}}(v) \geq C_{k+l-1}^k$ (Cas II).

Cas I : On considère le sous-graphe G_N de G induit par les voisins de v dans G . Puisque le graphe G est simple, on a $|V(G_N)| = d_G(v) \geq C_{k+l-1}^{k-1}$. De plus, $(k-1) + l = p$ et $k-1 \geq 1$, donc par l'hypothèse de récurrence : ou bien G_N contient un K_k dont l'ensemble des sommets avec le sommet v induisent un K_{k+1} de G , ou bien \overline{G}_N (et ainsi \overline{G}) contient un K_{l+1} .

Cas II : On considère le sous-graphe $G_{\overline{N}}$ de G induit par les non-voisins de v dans G . Puisque le graphe \overline{G} est simple, on a $|V(G_{\overline{N}})| = d_{\overline{G}}(v) \geq C_{k+l-1}^k$. De plus, $k + (l-1) = p$ et $l-1 \geq 1$, donc

par l'hypothèse de récurrence : ou bien $G_{\overline{N}}$ (et ainsi G) contient un K_{k+1} ou bien $\overline{G_{\overline{N}}}$ contient un K_l dont l'ensemble des sommets avec le sommet v induisent un K_{l+1} de \overline{G} . \square

Exercice 15 (Théorème de Turán, graphe sans K_3)

(a) Soit G un graphe simple sans K_3 ayant n sommets et m arêtes. Montrer que

$$m \leq \frac{n^2}{4}.$$

(b) Pour chaque n pair, donner un graphe simple sans K_3 tel que $m = \frac{n^2}{4}$.

(**Indication** : Procéder par récurrence sur le nombre de sommets en supprimant les deux extrémités d'une arête.)

Solution (a) On procède par récurrence sur n . Pour $n = 1$ ou 2 , l'inégalité est satisfaite. On suppose que l'inégalité est satisfaite pour les graphes simples sans K_3 ayant moins de n sommets. Soit G un graphe simple sans K_3 ayant $n \geq 3$ sommets. Si G ne possède pas d'arête alors l'inégalité est évidemment satisfaite. Soit donc uv une arête de G et soit $G' := G - \{u, v\}$. On notera n' et m' le nombre de sommets, respectivement d'arêtes, de G' , et m^* le nombre d'arêtes de G entre $\{u, v\}$ et les autres sommets de G . Comme G est simple, on a exactement une arête entre u et v et donc

$$m = m' + m^* + 1.$$

De même que G, G' qui est un sous-graphe de G , est un graphe simple sans K_3 . Par l'hypothèse de récurrence, on a

$$m' \leq \frac{(n')^2}{4}.$$

Soit $w \in V(G) \setminus \{u, v\}$. Puisque G est simple et sans K_3 , on a au plus une arête de G entre $\{u, v\}$ et w . Par conséquent, on a

$$m^* \leq n'.$$

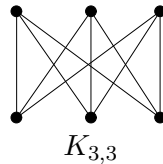
Puisque G' a été obtenu en supprimant deux sommets de G , on a

$$n = n' + 2.$$

Par les inégalités précédentes on obtient l'inégalité voulue

$$\begin{aligned} m &= m' + m^* + 1 \\ &\leq \frac{(n')^2}{4} + n' + 1 \\ &= \frac{(n')^2 + 4n' + 4}{4} \\ &= \frac{(n' + 2)^2}{4} \\ &= \frac{n^2}{4}. \end{aligned}$$

(b) Soit $K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$ le graphe dont l'ensemble des sommets est partitionné en deux sous-ensembles A et B de cardinalité $\frac{n}{2}$ et dont l'ensemble des arêtes est constitué de toutes les paires ab avec $a \in A$ et $b \in B$. Ce graphe simple a n sommets, ne contient pas de K_3 , et il possède exactement $\frac{n^2}{4}$ arêtes. Le graphe correspondant au cas $n = 6$ est représenté sur la FIG. 1.15.

FIGURE 1.15 – Le graphe $K_{3,3}$.

□

Exercice 16 (Théorème de Turán, graphe sans K_4)

(a) Soit G un graphe simple sans K_4 ayant n sommets et m arêtes. Montrer que

$$m \leq \frac{n^2}{3}.$$

(b) Pour $n = 6$, donner un graphe simple sans K_4 tel que $m = \frac{n^2}{3}$.

(Indication : Si le graphe est sans K_3 alors utiliser l'Exercice 15, sinon procéder par récurrence sur le nombre de sommets en supprimant les trois sommets d'un K_3 .)

Solution (a) On procède par récurrence sur n . Pour $n \leq 3$, l'inégalité est satisfaite. On suppose que l'inégalité est satisfaite pour les graphes simples sans K_4 ayant moins de n sommets. Soit G un graphe simple sans K_4 ayant $n \geq 4$ sommets. Si G est sans K_3 alors, par l'Exercice 15, on a $m \leq \frac{n^2}{4} \leq \frac{n^2}{3}$. Soit donc K un K_3 de G et soit $G' := G - V(K)$. On notera n' et m' le nombre de sommets, respectivement d'arêtes, de G' , et m^* le nombre d'arêtes de G entre $V(K)$ et les autres sommets de G . Comme G est simple, on a exactement trois arêtes dans K et donc

$$m = m' + m^* + 3.$$

De même que G , G' qui est un sous-graphe de G , est un graphe simple sans K_4 . Par l'hypothèse de récurrence, on a

$$m' \leq \frac{(n')^2}{3}.$$

Soit $w \in V(G) \setminus V(K)$. Puisque G est simple et sans K_4 et que K est un K_3 , on a au plus deux arêtes de G entre $V(K)$ et w . Par conséquent, on a

$$m^* \leq 2n'.$$

Puisque G' a été obtenu en supprimant trois sommets de G , on a

$$n = n' + 3.$$

Par les inégalités précédentes on obtient l'inégalité voulue

$$\begin{aligned} m &= m' + m^* + 3 \\ &\leq \frac{(n')^2}{3} + 2n' + 3 \\ &= \frac{(n')^2 + 6n' + 9}{3} \\ &= \frac{(n' + 3)^2}{3} \\ &= \frac{n^2}{3}. \end{aligned}$$

(b) Soit H le graphe obtenu à partir de K_6 en enlevant trois arêtes e_1, e_2, e_3 deux à deux non-adjacentes. Supposons que H contienne un sous-graphe complet K à quatre sommets. Dans ce cas, dans le K_6 initial, les arêtes e_1, e_2, e_3 sont incidentes aux deux sommets extérieurs à K ce qui est impossible puisqu'elles sont deux à deux non-adjacentes. De plus, $|V(H)| = 6$ et $|E(H)| = 15 - 3 = 12 = \frac{6^2}{3}$. Le graphe H est représenté sur la FIG. 1.16.

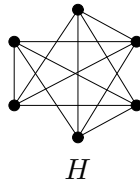


FIGURE 1.16 – Le graphe H .

□

1.2 Chaînes, cycles

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Une **chaîne** P de G est une suite alternée de sommets et d'arêtes de G :

$$P = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k,$$

où $v_i \in V$ pour $0 \leq i \leq k$ et $e_i = v_{i-1} v_i \in E$ pour $1 \leq i \leq k$. (FIG. 1.17 (a)). On notera $\mathbf{V}(P)$ l'ensemble de ses sommets $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ et $\mathbf{E}(P)$ l'ensemble de ses arêtes $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$. Si le graphe est simple on pourra utiliser la notation $P = v_0 v_1 \dots v_k$. Une suite constituée d'un sommet est considérée comme une chaîne. Une chaîne est une **chaîne simple** si ses arêtes sont toutes distinctes (FIG. 1.17 (b)), et c'est une **chaîne élémentaire** si ses sommets sont tous distincts (FIG. 1.17 (c)). Si on veut mentionner explicitement le sommet initial v_0 et le sommet terminal v_k de P , on dit que P est une **(v_0, v_k)-chaîne** ou chaîne entre v_0 et v_k , ou bien que les **extrémités** de P sont v_0 et v_k . Étant donné deux sommets v_i, v_j de P , $i \leq j$,

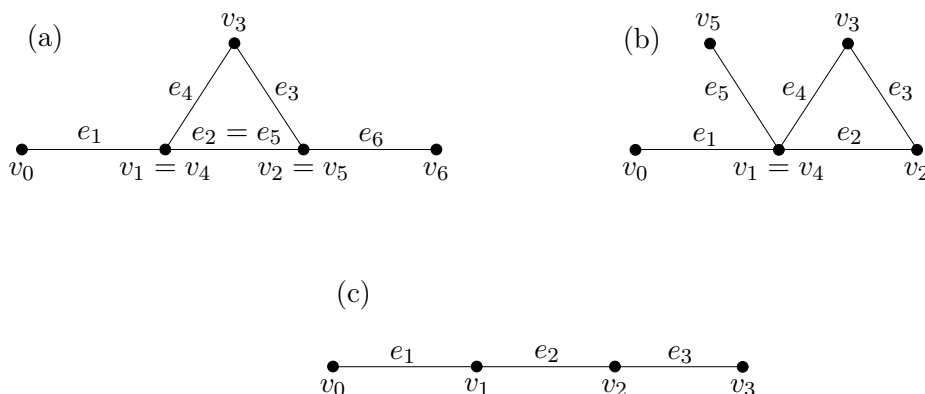


FIGURE 1.17 – (a) une chaîne, (b) une chaîne simple, (c) une chaîne élémentaire.

$$P[v_i, v_j] = v_i e_{i+1} v_{i+1} e_{i+2} \dots e_{j-1} v_j$$

est appelée **sous-chaîne de P** entre v_i et v_j . Si $P = v_0e_1v_1e_2v_2 \dots e_kv_k$ et $Q = u_0f_1u_1f_2u_2 \dots f_lu_l$ sont deux chaînes telles que le sommet terminal de P et le sommet initial de Q coïncident, c'est-à-dire $v_k = u_0$, alors la **concaténation** de P et Q notée $P + Q$ (FIG. 1.18) dénote la chaîne

$$v_0e_1v_1e_2v_2 \dots e_kv_k(= u_0)f_1u_1f_2u_2 \dots f_lu_l.$$

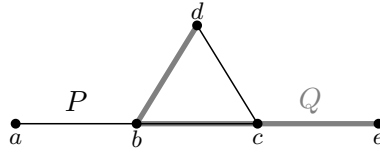


FIGURE 1.18 – La concaténation $P + Q = abcdcbce$ des chaînes $P = abcd$ et $Q = dbce$.

Un **cycle** C est une séquence circulaire alternée de sommets et d'arêtes de G :

$$C = v_0e_1v_1e_2v_2 \dots e_kv_k$$

où $k \geq 1$, $v_i \in V$ pour $0 \leq i \leq k-1$, $e_i = v_{i-1}v_i \in E$ pour $1 \leq i \leq k-1$ et $e_k = v_{k-1}v_0 \in E$ sont des arêtes distinctes (FIG. 1.19 (a)). Autrement dit, un cycle correspond à une chaîne simple dont les extrémités sont confondues et contenant au moins une arête. On notera $V(C)$ l'ensemble de ses sommets et $E(C)$ l'ensemble de ses arêtes. Un **cycle élémentaire** est un cycle dont les sommets sont distincts (FIG. 1.19 (b)).

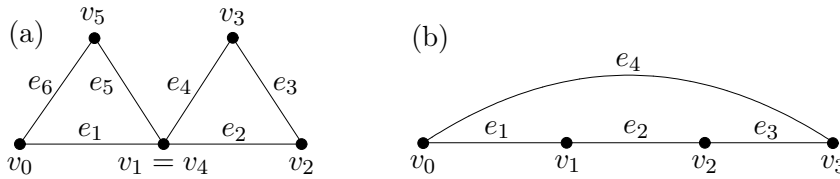


FIGURE 1.19 – (a) un cycle, (b) un cycle élémentaire.

Remarque 6 *Puisqu'un cycle C est une séquence circulaire, n'importe quel sommet v de C et n'importe quelle arête e de C incidente à v peuvent être choisis comme v_0 et e_1 de la séquence.*

Dans la suite on pourra aussi considérer une chaîne ou un cycle comme le graphe induit par ses ensembles de sommets et d'arêtes. La **longueur d'une chaîne** ou **d'un cycle** est le nombre d'arêtes le constituant. Un cycle élémentaire de longueur trois est appelé **triangle**.

Remarque 7 *Dans un graphe à n sommets, une chaîne élémentaire est de longueur inférieure ou égale à $n-1$. Par conséquent, la longueur maximum d'une chaîne élémentaire du graphe peut être définie.*

Exercice 17 *Soient u et v deux sommets d'un graphe G . Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) *Il existe une chaîne entre u et v dans G .*
- (b) *Il existe une chaîne simple entre u et v dans G .*

(c) Il existe une chaîne élémentaire entre u et v dans G .

Solution Il est évident que (c) implique (b) et que (b) implique (a). Il suffit donc de montrer que (a) implique (c). Par (a), il existe une chaîne entre u et v dans G , soit

$$P = x_0(= u)e_1x_1e_2x_2 \dots e_kx_k(= v)$$

une telle chaîne de longueur minimum. On va montrer que P est une chaîne élémentaire. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un sommet qui apparaît plus d'une fois dans la chaîne P , c'est-à-dire qu'il existe deux indices distincts i et j tels que $x_i = x_j$. En enlevant de P la sous-suite $x_i e_{i+1} \dots x_{j-1} e_j$ entre x_i et x_j on obtient une chaîne entre u et v qui est plus courte que P ce qui contredit notre hypothèse sur P . \square

Remarque 8 Dans la solution de l'Exercice 17, on montre plus précisément que toute chaîne C contient une sous-chaîne qui a les mêmes extrémités que C et qui est élémentaire.

Exercice 18 Montrer que tout cycle contient un cycle élémentaire.

Solution Soit C un cycle quelconque et soit uv une arête de C . En supprimant l'arête uv de C on obtient une (u, v) -chaîne. Par la Remarque 53, cette chaîne contient une (u, v) -chaîne élémentaire P . En rajoutant l'arête uv à P on obtient un cycle élémentaire contenu dans C . \square

Exercice 19 Soient x, y et z trois sommets d'un graphe G . Montrer que s'il existe dans G une (x, y) -chaîne élémentaire et une (y, z) -chaîne élémentaire, alors il existe une (x, z) -chaîne élémentaire.

Solution Soit P_{xy} (respectivement P_{yz}) une chaîne élémentaire d'extrémités x et y (resp. y et z). La concaténation $P_{xz} := P_{xy} + P_{yz}$ est une (x, z) -chaîne et, d'après l'Exercice 17, il existe donc une (x, z) -chaîne élémentaire dans G . \square

Exercice 20 Dans un graphe G , soient s et t deux sommets distincts, P une (s, t) -chaîne dans G et X un sous-ensemble de sommets contenant s et pas t . Montrer que la coupe de G définie par X contient au moins une arête de P .

Solution On pose $P = (s = v_1)v_2 \dots v_{l-1}(v_l = t)$. Soit i le plus petit indice tel que $v_i \in V(G) \setminus X$ (cet indice existe car $v_l \in V(G) \setminus X$). Alors, comme $v_1 \in X$, on a $i \geq 2$, d'où $v_{i-1} \in X$, et donc l'arête $v_{i-1}v_i$ de P appartient à la coupe définie par X (FIG. 1.20).

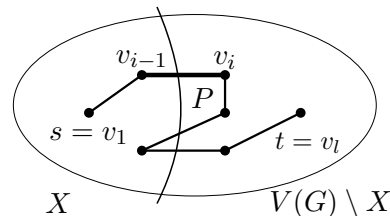


FIGURE 1.20 – Les sommets s et t , une (s, t) -chaîne P , un ensemble X contenant s et pas t , les sommets v_i et v_{i-1} , et l'arête $v_i v_{i-1}$. \square

Exercice 21 Dans un graphe G , soient s et t deux sommets distincts. Montrer qu'il existe une (s, t) -chaîne dans G si et seulement si pour tout sous-ensemble X de sommets contenant s et pas t , la coupe de G définie par X contient au moins une arête.

Solution Nous montrons tout d'abord que la condition est nécessaire. Supposons qu'il existe une (s, t) -chaîne P dans G . Par l'Exercice 20, la coupe de G définie par X contient au moins une arête de P .

Pour vérifier que la condition est suffisante, supposons que pour tout sous-ensemble X de sommets contenant s et pas t , la coupe de G définie par X contient au moins une arête. Soit S l'ensemble des sommets u de G pour lesquels il existe une (s, u) -chaîne P_u dans G . Alors $\delta_G(S) = \emptyset$, car si uv était une arête de $\delta_G(S)$, alors $P_u + uv$ serait une (s, v) -chaîne, c'est-à-dire que v appartiendrait à S , ce qui contredit la définition de S . Puisque S contient s et $\delta_G(S)$ est vide, d'après la condition, on a que $t \in S$, autrement dit, qu'il existe une (s, t) -chaîne dans G . \square

ALGORITHME DE MARQUAGE :

ENTRÉE : Un graphe G et un sommet s de G .

SORTIE : L'ensemble S des sommets de G qui sont reliés à s par une chaîne de G .

Etape 0 : *Initialisation.*
 $S := \{s\}$.

Etape 1 : *Marquage.*
 Tant qu'il existe une arête uv de G telle que $u \in S, v \notin S$ faire :
 $S := S \cup \{v\}$.

Etape 2 : *Fin de l'algorithme.*

FIGURE 1.21 – Algorithme de Marquage.

Exercice 22 (Justification de l'algorithme de Marquage (FIG. 1.21))

Montrer que l'algorithme de Marquage appliqué au sommet s du graphe G

- (a) *s'arrête,*
- (b) *construit un ensemble S qui est égal à l'ensemble T des sommets de G qui sont reliés à s par une chaîne de G .*

Solution Lorsqu'un sommet est mis dans S on dit qu'il est marqué et donc, à chaque étape de l'algorithme, S représente l'ensemble des sommets marqués.

(a) Il suffit de montrer que le nombre d'itérations de l'Étape de marquage est fini. A chaque itération un nouveau sommet est marqué, et cela définitivement, donc le nombre d'itérations est borné supérieurement par le nombre de sommets de G .

(b) A l'initialisation, s est marqué, donc quand l'algorithme s'arrête $s \in S$ et $\delta_G(S) = \emptyset$. Alors par l'Exercice 21, aucun sommet de T ne se trouve en dehors de S , ainsi $T \subseteq S$.

Soit S_i l'ensemble S à la i -ième itération de l'Étape 1 pour $1 \leq i \leq k$, où k est le nombre d'itérations de l'Étape 1 (k est fini par (a)). Nous montrons par récurrence sur i que $S_i \subseteq T$, c'est-à-dire que pour chaque sommet r de S_i , G contient une (s, r) -chaîne. Pour $i = 0$, $S_0 = \{s\}$ et G contient une (s, s) -chaîne. Supposons maintenant que pour un i ($0 \leq i \leq k - 1$), $S_i \subseteq T$. A la $(i + 1)$ -ième itération de l'Étape 1, il existe une arête uv de G telle que $u \in S_i, v \notin S_i$ et $S_{i+1} = S_i \cup \{v\}$. Puisque $u \in S_i \subseteq T$, G contient une (s, u) -chaîne P_u . Comme $P_u + uv$ est une (s, v) -chaîne de G , $v \in T$ et ainsi $S_{i+1} \subseteq T$.

Par conséquent, $S = S_k \subseteq T$, et ainsi $S = T$. \square

ALGORITHME CHAÎNE :

ENTRÉE : Un graphe G et deux sommets distincts s et t de G .

SORTIE : Une (s, t) -chaîne P de G ou un certificat X qu'il n'y en a pas.

Étape 0 : *Initialisation.*
 $S := \{s\}$, $p(s) := s$.

Étape 1 : *Marquage.*
 Tant que $t \notin S$ et qu'il existe une arête uv de G telle que $u \in S, v \notin S$ faire :
 $S := S \cup \{v\}$, $p(v) := u$.

Étape 2 : *Construction de la chaîne.*
 Si $t \in S$ faire :
 $v := t$, $P := v$,
 tant que $p(v) \neq v$ faire :
 $u := p(v)$, $e := uv$, $P := ueP$, $v := u$,
 STOP.

Étape 3 : *Construction du certificat.*
 $X := S$, STOP.

FIGURE 1.22 – Algorithme Chaîne.

Exercice 23 (Justification de l'algorithme Chaîne (FIG. 1.22)) *Montrer que l'algorithme Chaîne, appliqué aux sommets s et t du graphe G , se termine avec une (s, t) -chaîne de G ou avec un certificat de l'inexistence d'une (s, t) -chaîne dans G .*

Solution A chaque itération de l'Étape 1, un nouveau sommet est marqué (mis dans S). Par conséquent, le nombre d'itérations de l'Étape 1 est fini et on peut considérer l'ordre dans lequel les sommets ont été marqués. Notons que pour tout sommet $v \in S$, $p(v)$ est le sommet par lequel v a été marqué, donc $p(v)$ se trouve avant v dans l'ordre. Si t est marqué alors l'Étape 2 permet de reconstituer la suite de marquages qui ont entraîné le marquage de t à partir de celui de s .

Si l'algorithme s'arrête à l'Étape 2, alors S construit à l'Étape 1 est tel que $t \notin S$ et donc $\delta_G(S) = \emptyset$. Puisque $s \in S$ (à l'Étape 0, s est mis dans S et au cours de l'algorithme aucun sommet n'est ôté de S), par l'Exercice 21, l'ensemble $X = S$ certifie qu'il n'existe pas de (s, t) -chaîne dans G . □

Exercice 24 *Montrer qu'un graphe sans boucle G possède un cycle si et seulement si il existe dans G deux sommets distincts reliés par deux chaînes élémentaires distinctes.*

Solution Montrons tout d'abord que la condition est nécessaire. Soit C un cycle dans G . Par l'Exercice 18, C contient un cycle élémentaire C' . Soit xy une arête quelconque de C' . Puisque G est sans boucle, les sommets x et y sont distincts. Ils sont reliés par deux chaînes élémentaires distinctes, à savoir xy et $C' - xy$.

Pour vérifier que la condition est suffisante, supposons qu'il existe dans G deux sommets distincts reliés par deux chaînes élémentaires distinctes. Choisissons ces sommets et ces chaînes $P_1 = v_1v_2\dots v_k$ et $P_2 = u_1u_2\dots u_l$ ($v_1 = u_1, v_k = u_l$) de telle façon que $k + l$ soit minimum. Supposons qu'il existe $1 < i < k$ et $1 < j < l$ tels que $v_i = u_j$. Soient

$$P'_1 := P_1[v_1, v_i], P'_2 := P_2[u_1, u_j], P''_1 := P_1[v_i, v_k], P''_2 := P_2[u_j, u_l].$$

Alors v_1 et v_i sont reliés par les chaînes élémentaires P'_1 et P'_2 , et v_i et v_k sont reliés par les chaînes élémentaires P''_1 et P''_2 . Puisque P'_1 et P'_2 , ou bien P''_1 et P''_2 , sont distinctes (sinon P_1 et

P_2 seraient égales), on obtient une contradiction au fait que $k+l$ est minimum. Donc les sommets intérieurs de P_1 et P_2 sont tous distincts, et la concaténation de P_1 et de P_2 prise à rebours est un cycle élémentaire. \square

Exercice 25 Soit G un graphe simple. Montrer que :

- (a) si $P = v_1 \dots v_l$ est une plus longue chaîne élémentaire dans G , alors tous les voisins de v_1 sont dans $\{v_2, \dots, v_l\}$,
- (b) si tous les degrés des sommets de G sont supérieurs ou égaux à deux, alors G possède un cycle élémentaire,
- (c) si tous les degrés des sommets de G sont supérieurs ou égaux à $k \geq 2$, alors G possède un cycle élémentaire dont la longueur est supérieure ou égale à $k+1$.

Solution (a) Supposons que v_1 possède un voisin $u \notin \{v_2, \dots, v_l\}$. Dans ce cas $uv_1 + P$ serait une chaîne élémentaire plus longue que P , ceci est une contradiction (FIG. 1.23).

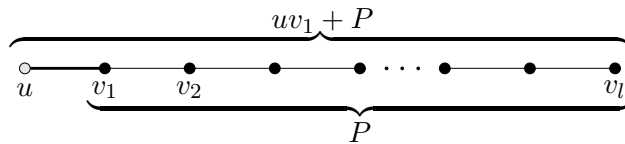


FIGURE 1.23 – Le cas où v_1 possède un voisin u n'appartenant pas à P .

(b) Soit $P := v_1 v_2 \dots v_l$ une plus longue chaîne élémentaire de G . Par hypothèse, $d(v_1) \geq 2$, donc il existe une arête $v_1 u$ incidente à v_1 et différente de $v_1 v_2$. Grâce à l'Exercice 25(a), on sait que $u \in \{v_3, \dots, v_l\}$. Donc $C = P[v_1, u] + uv_1$ est un cycle élémentaire (FIG. 1.24).

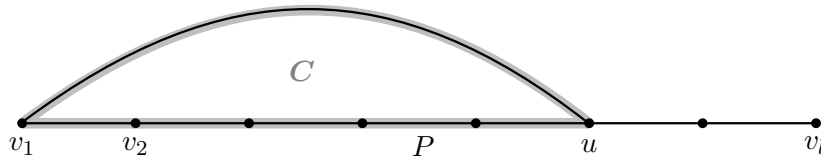


FIGURE 1.24 – La chaîne élémentaire P et le cycle élémentaire C .

(c) Soit $P := v_1 v_2 \dots v_l$ une plus longue chaîne élémentaire de G . Soit j l'indice maximum d'un sommet de P voisin de v_1 . On sait, d'après l'Exercice 25(a), que tous les voisins de v_1 se trouvent dans $\{v_2, \dots, v_j\}$. Le graphe étant simple, on en conclut que

$$|\{v_2, \dots, v_j\}| \geq d(v_1) \geq k$$

et donc $j \geq k+1$. Par conséquent, $P[v_1, v_j] + v_j v_1$ est un cycle élémentaire de longueur au moins $k+1$. \square

Exercice 26 Soit G un graphe simple tel que tous ses sommets sont de degré supérieur ou égal à trois. Montrer que G possède :

- (a) un cycle élémentaire et une arête reliant deux sommets non consécutifs de ce cycle,

- (b) deux sommets u et v reliés par trois chaînes sans sommet commun en dehors de leurs extrémités.
- (c) un cycle élémentaire de longueur paire,

Solution (a) Soit $P := v_1v_2 \dots v_l$ une plus longue chaîne élémentaire de G . Alors, d'après l'Exercice 25(a), tous les voisins de v_1 se trouvent dans $\{v_2, \dots, v_l\}$. Par hypothèse, $d(v_1) \geq 3$ et G est simple; soient donc v_i et $v_j, 2 < i < j \leq l$, deux voisins de v_1 distincts. Le cycle $C := P[v_1, v_j] + v_jv_1$ est un cycle élémentaire et v_1v_i est une arête reliant deux sommets non consécutifs de C (FIG. 1.25).

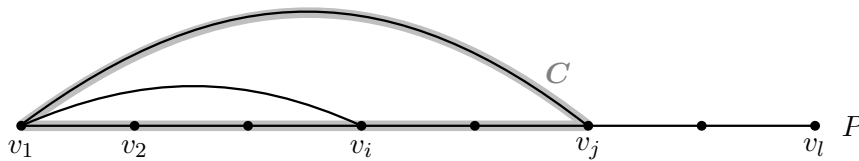


FIGURE 1.25 – La construction du cycle.

(b) D'après l'Exercice 26(a), il existe dans G un cycle élémentaire C et une arête uv reliant deux sommets non consécutifs de C . Les sommets u et v divisent C en deux chaînes élémentaires P_1 et P_2 telles que $C = P_1 + P_2$. Alors P_1, P_2 et uv sont les trois chaînes recherchées (FIG. 1.26).

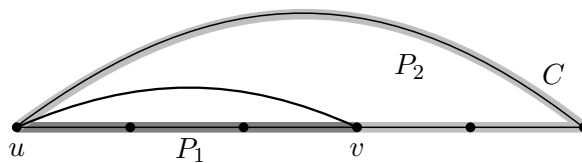


FIGURE 1.26 – Les trois (u, v) -chaînes.

(c) D'après l'Exercice 26(b), il existe dans G deux sommets u et v reliés par trois chaînes P_1, P_2, P_3 sans sommet commun en dehors de leurs extrémités. Au moins deux parmi ces trois chaînes ont des longueurs de même parité, leur concaténation est un cycle élémentaire de longueur paire (FIG. 1.27).

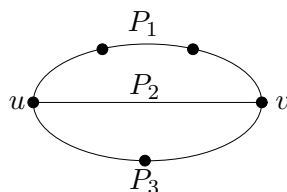


FIGURE 1.27 – Dans cet exemple $P_1 + P_2$ est un cycle élémentaire de longueur paire.

□

1.3 Connexité

Un graphe G est **connexe** si, pour chaque paire de sommets de G , il existe une chaîne qui connecte ces sommets.

Remarque 9 Par l'Exercice 17, un graphe G est connexe si et seulement si, pour chaque paire de sommets de G , il existe une chaîne élémentaire qui connecte ces sommets.

Remarque 10 Le graphe obtenu à partir d'un graphe connexe en rajoutant une arête est connexe.

Dans un graphe G , un sous-graphe connexe et maximal pour cette propriété est appelé **composante connexe** de G (FIG. 1.28). Donc, un graphe est connexe si et seulement si il possède exactement une composante connexe.

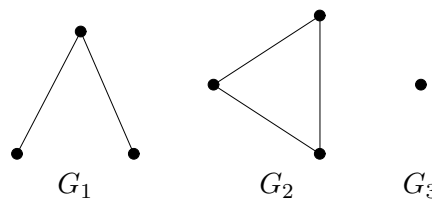


FIGURE 1.28 – Un graphe G ayant trois composantes connexes G_1, G_2, G_3 .

Exercice 27 Étant donné un graphe G , on définit la relation suivante sur les sommets : $x \sim_G y$ s'il existe une chaîne entre x et y dans G . Montrer que

- \sim_G est une relation d'équivalence,
- les composantes connexes de G sont les sous-graphes induits par les classes d'équivalence de la relation \sim_G .

Solution (a) Par définition \sim_G est une relation réflexive et symétrique. La transitivité de \sim_G vient du fait que si P_{xy} et P_{yz} sont des chaînes respectivement entre x et y et entre y et z alors la concaténation $P_{xy} + P_{yz}$ de ces deux chaînes est une chaîne entre x et z .

(b) Nous devons démontrer que deux sommets x et y sont dans une même composante connexe G_i de G si et seulement si $x \sim_G y$. Par définition, si $x, y \in V(G_i)$ alors $x \sim_G y$. Réciproquement, si $x \sim_G y$ alors il existe dans G une chaîne P entre x et y . Le sous-graphe de G induit par les sommets de P est connexe (P connecte entre eux tous les sommets de ce sous-graphe), il est donc inclus dans une composante connexe de G qui contient x et y . \square

Remarque 11 Par l'Exercice 27, on a que les composantes connexes de G partitionnent l'ensemble des sommets de G et qu'il n'y a pas d'arête entre elles.

Remarque 12 Quand on rajoute une arête e à un graphe G , deux cas peuvent se produire :

- si les extrémités de e sont dans la même composante connexe de G , alors la partition des sommets induite par les composantes connexes reste identique et e appartient à un cycle,
- si les extrémités de e sont dans des composantes connexes distinctes de G , alors la nouvelle partition s'obtient à partir de l'ancienne en remplaçant les ensembles contenant les extrémités de e par leur réunion et e n'appartient à aucun cycle.

Exercice 28 (Caractérisation des graphes connexes) *Montrer qu'un graphe G est connexe si et seulement si*

$$d(X) \geq 1 \quad \text{pour tout } X \subset V(G), X \neq \emptyset. \quad (1.3)$$

Solution Supposons d'abord que G est connexe et que $X \subset V(G), X \neq \emptyset$. Soient $x \in X$ et $y \in V(G) \setminus X$. Puisque G est connexe, il contient une (x, y) -chaîne P . Par l'Exercice 20, la coupe définie par X contient au moins une arête de P , c'est-à-dire $d(X) \geq 1$.

Pour montrer que la condition (1.3) est suffisante supposons qu'elle soit satisfaite. Soit G_1 une composante connexe de G . Alors, pour $X = V(G_1)$ on a $X \neq \emptyset$ et, par la Remarque 11, $d(X) = 0$, donc, par (1.3), $X = V(G)$, c'est-à-dire que G est connexe. \square

Exercice 29 *Montrer qu'un graphe connexe G sans chaîne élémentaire de longueur 2 a au plus deux sommets.*

Solution On suppose par l'absurde que G ait au moins trois sommets. Soit u un sommet de G . Par l'Exercice 28 appliqué à $\{u\}$, il existe une arête uv incidente à u . Le même exercice appliqué à $\{u, v\}$, implique qu'il existe une autre arête zw telle que $z \in \{u, v\}$ et $w \notin \{u, v\}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $z = v$. Par conséquent, G contient la chaîne élémentaire uvw de longueur 2, ce qui contredit l'hypothèse sur G . \square

Exercice 30 *Soit G un graphe simple à n sommets tel que chaque sommet est de degré supérieur ou égal à $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Montrer que G est connexe.*

Solution Supposons par l'absurde que G possède plus qu'une composante connexe. Dans ce cas, puisque G contient n sommets, au moins une composante connexe de G contient un nombre de sommets inférieur ou égal à $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Soit G' une telle composante connexe de G et n' le nombre de sommets de G' . Par les Remarques 11 et 1, pour chaque sommet v de G' on a

$$d_G(v) = d_{G'}(v) \leq n' - 1 \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1,$$

ce qui contredit l'hypothèse $d_G(v) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. \square

Exercice 31 *Soient C un cycle d'un graphe connexe G et e une arête de C . Montrer que $G - e$ est connexe.*

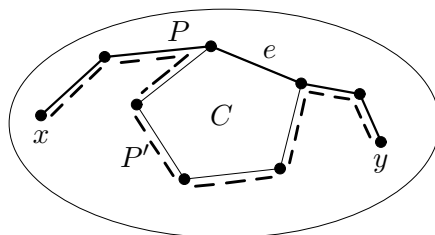
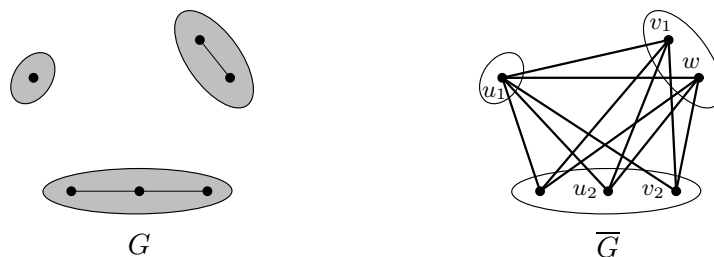
Solution Pour chaque paire de sommets x et y de G , il existe une chaîne P reliant x et y car G est connexe. Si $e \notin E(P)$, alors P est une (x, y) -chaîne dans $G - e$. Si $e \in E(P)$ alors en remplaçant dans P l'arête e par la chaîne $C - e$ on obtient une (x, y) -chaîne P' dans $G - e$ (FIG. 1.29). Donc $G - e$ est connexe. \square

Exercice 32 *Montrer qu'au moins l'un des deux graphes G ou \overline{G} est connexe.*

Solution Il suffit de montrer que si G n'est pas connexe alors \overline{G} est connexe. Supposons donc que G n'est pas connexe. Soient u et v deux sommets arbitraires.

Si u et v sont dans des composantes connexes de G distinctes alors, dans \overline{G} , ils sont reliés par une arête et donc par une chaîne.

Si u et v sont dans la même composante connexe de G , puisque G n'est pas connexe, il existe un sommet w qui appartient à une autre composante connexe de G . Alors, dans \overline{G} , les sommets u et v sont reliés par la chaîne $uw + vw$ (FIG. 1.30). \square

FIGURE 1.29 – La (x, y) -chaîne P de G et la (x, y) -chaîne P' de $G - e$.FIGURE 1.30 – Les paires $\{u_1, v_1\}$ et $\{u_2, v_2\}$ illustrent les deux cas de la démonstration.

Étant donné un graphe H , un **graphe sans H induit** est un graphe dont aucun sous-graphe n'est isomorphe à H . On appelle P_4 le graphe à 4 sommets induit par une chaîne sans corde de longueur 3. On remarque que $\overline{P_4}$ est isomorphe à P_4 .

Exercice 33 Montrer que si un graphe G est sans P_4 induit et a au moins deux sommets, alors au moins l'un des graphes G et \overline{G} n'est pas connexe.

Solution On procède par récurrence sur le nombre de sommets de G . Pour un graphe à deux sommets la propriété est vérifiée. On suppose maintenant que la propriété est vérifiée par tous les graphes ayant au moins n sommets, $n \geq 2$, et on considère un graphe G ayant $n+1 \geq 3$ sommets. On va montrer que si G et \overline{G} sont connexes, alors G contient un sous-graphe isomorphe à P_4 , prouvant ainsi la propriété. Pour un sommet v de G , $G - v$ a au moins 2 sommets et est sans P_4 induit. Par l'hypothèse de récurrence, l'un des deux graphes $G - v$ et $\overline{G - v}$ n'est pas connexe. On peut supposer que c'est $G - v$, sinon on peut faire le même raisonnement que ci-dessous à partir de \overline{G} . Puisque \overline{G} est connexe, par l'Exercice 28, il existe au moins une arête incidente à v dans \overline{G} , et donc dans G il existe un sommet w qui n'est pas adjacent à v . Soit C la composante connexe de $G - v$ qui contient w et C' une autre composante connexe de $G - v$. Comme G est connexe, il existe u dans C et u' dans C' , deux voisins de v dans G . Puisque u et w sont dans la même composante connexe C de $G - v$, il existe une chaîne $(u = u_1)u_2 \dots (u_k = w)$ dans C . Soit u_j , le sommet de plus petit indice de cette chaîne, qui est non-voisin de v dans G . Comme $u_k = w$ est un non-voisin de v dans G et $u_1 = u$ est un voisin de v dans G , l'indice j existe et u_{j-1} est un voisin de v dans G . Par conséquent, le sous-graphe de G induit par les sommets u', v, u_{j-1} et u_j est un P_4 : ainsi la propriété est démontrée (FIG. 1.31).

Exercice 34 Soit G un graphe connexe. Soient X et Y deux sous-ensembles de sommets de G qui sont disjoints. Montrer qu'il existe une chaîne élémentaire ayant une extrémité dans X et l'autre dans Y telle que tous les sommets intermédiaires sont en dehors de X et Y .

Solution Puisque G est connexe, étant donné un sommet de X et un sommet de Y , il existe une chaîne reliant ces sommets. On peut donc considérer parmi les chaînes ayant une extrémité

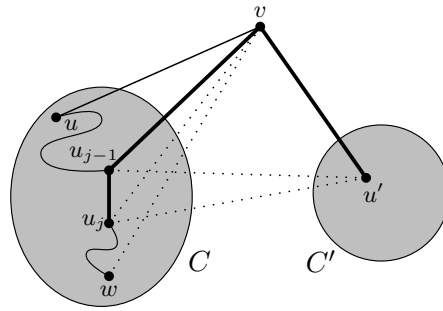


FIGURE 1.31 – Le sous-graphe de G induit par les sommets u', v, u_{j-1} et u_j est un P_4 . \square

dans X et l'autre dans Y , une chaîne P de longueur minimum. Il s'en suit, par la Remarque 53, que P est élémentaire. Supposons par l'absurde qu'un sommet intermédiaire de P soit dans $X \cup Y$. Alors ce sommet divise P en deux sous-chaînes, une d'entre elles, P' sur la FIG. 1.32, a une extrémité dans X et l'autre dans Y , ce qui est une contradiction à l'hypothèse sur P .

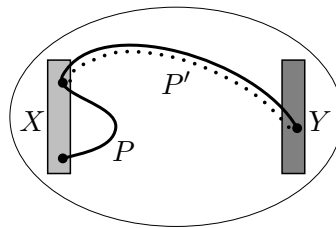


FIGURE 1.32 – La chaîne P en gras et la sous-chaîne P' en pointillé.

Une autre preuve peut être obtenue en adaptant de la façon suivante la démonstration de l'Exercice 20.

Soient $x \in X$ et $y \in Y$. Puisque G est connexe, par la Remarque 9, il existe une (x, y) -chaîne élémentaire $(x = v_1)v_2 \dots v_{l-1}(v_l = y)$. Soit i le plus petit indice tel que $v_i \in Y$ (cet indice existe car $v_l \in Y$). Soit j le plus grand indice inférieur à i tel que $v_j \in X$ (cet indice existe car $v_1 \in X$ et $v_i \in Y$). Par définition de v_i et v_j , la sous-chaîne $v_i v_{i+1} \dots v_j$ vérifie les conditions de l'exercice \square

Exercice 35 Soit G un graphe connexe. Montrer que deux chaînes élémentaires de G de longueur maximum ont un sommet en commun.

Solution Par la Remarque 52, on peut définir la longueur l d'une plus longue chaîne élémentaire de G . Supposons par l'absurde que G contienne deux chaînes élémentaires P_1 et P_2 de longueur l sans sommet commun. D'après l'Exercice 34, avec $X = V(P_1)$ et $Y = V(P_2)$, il existe une (v_1, v_2) -chaîne Q telle que $v_1 \in V(P_1), v_2 \in V(P_2)$ et aucun sommet intermédiaire n'est dans P_1 ou P_2 . Remarquons que $|E(Q)| \geq 1$. Pour $i = 1, 2$, le sommet v_i divise P_i en deux sous-chaînes P'_i et P''_i , on peut supposer sans perte de généralité que la longueur de P'_i est supérieure ou égale à $l/2$. Alors $R := P'_1 + Q + P'_2$ est une chaîne élémentaire (FIG. 1.33) telle que

$$|E(R)| = |E(P'_1)| + |E(Q)| + |E(P'_2)| \geq l/2 + 1 + l/2 > l,$$

ce qui contredit la définition de l .

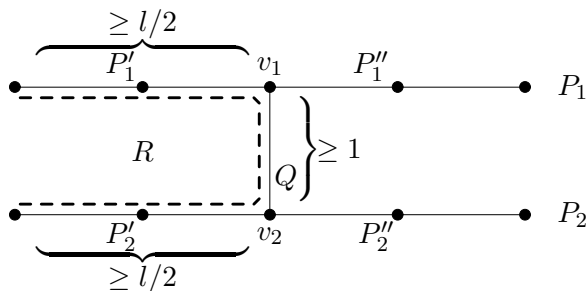


FIGURE 1.33 – Les chaînes P_1, P_2, Q et R . □

1.4 Graphes hamiltoniens

Un graphe G à n sommets est un **graphe hamiltonien** s'il possède un cycle élémentaire de longueur n (c'est-à-dire contenant chacun des sommets de G exactement une fois). Un tel cycle est appelé **cycle hamiltonien**. Notons que l'existence d'un cycle qui contient tous les sommets d'un graphe n'implique pas que ce graphe soit hamiltonien (voir FIG. 1.19(a)). Une chaîne élémentaire qui contient tous les sommets d'un graphe est appelée **chaîne hamiltonienne**. Nous soulignons que décider si un graphe est hamiltonien est un problème difficile (NP -complet) [?].

Exercice 36 (a) Sur un échiquier 8×8 (FIG. 1.34)(a), un cavalier posé sur la case en bas à gauche, peut-il se déplacer de telle sorte qu'il revienne à la case de départ après avoir exploré chacune des cases une fois et une seule fois ?

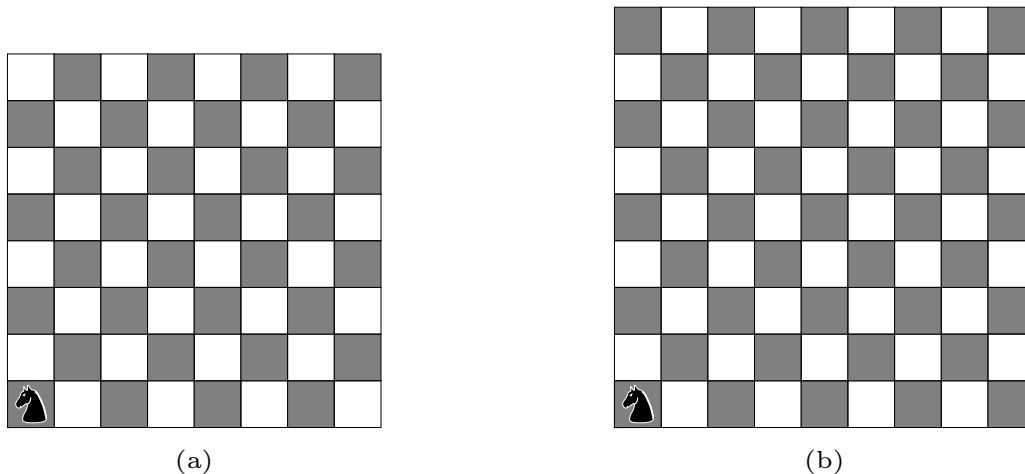


FIGURE 1.34 – (a) L'échiquier 8×8 , (b) l'échiquier 9×9 .

(b) Même question pour un échiquier 9×9 (FIG. 1.34)(b).

Solution Le problème du cavalier peut être exprimé comme un problème de théorie des graphes. A l'échiquier $k \times k$ on associe le graphe $G_{k \times k}$ suivant : les sommets sont les cases et deux sommets sont reliés par une arête si les deux cases correspondantes sont disposées de manière à ce qu'un mouvement du cavalier permette de passer de l'une à l'autre. La question est : ce graphe possède-t-il un cycle hamiltonien ?

(a) La réponse est oui. Sur la FIG. 1.35 on a représenté le graphe $G_{8 \times 8}$ et un cycle hamiltonien en gras.

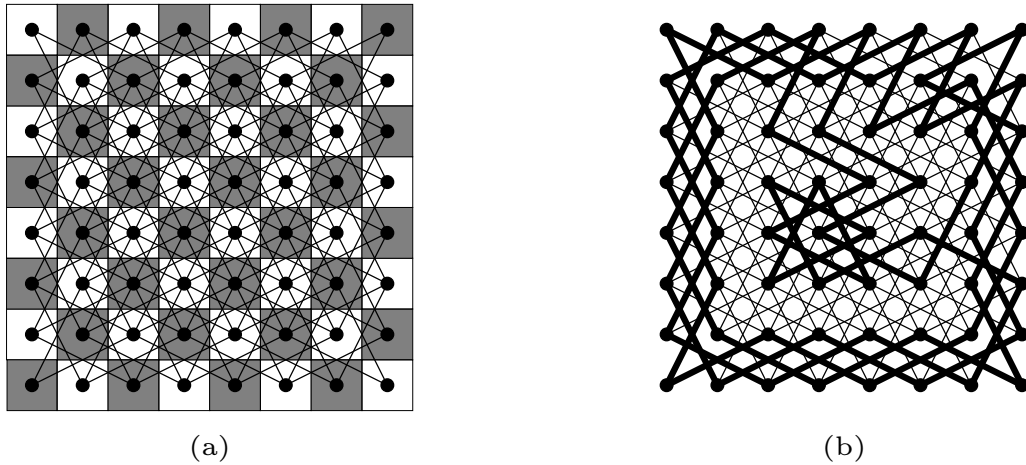


FIGURE 1.35 – (a) Le graphe $G_{8 \times 8}$, (b) un cycle hamiltonien de $G_{8 \times 8}$ en gras.

(b) La réponse est non. En effet, si on attribue à chaque sommet du graphe $G_{9 \times 9}$ la couleur de sa case, on remarque que les extrémités de chaque arête sont de couleurs différentes (à chaque mouvement le cavalier passe sur une case de couleur différente). Par conséquent, chaque cycle de $G_{9 \times 9}$ contient le même nombre de sommets de chacune des couleurs. Puisque le nombre de cases et donc de sommets est égal à 81 qui est impair, $G_{9 \times 9}$ ne contient pas de cycle hamiltonien. \square

Remarque 13 *Il existe plusieurs cycles hamiltoniens différents dans $G_{8 \times 8}$.*

Exercice 37 *Soient G un graphe connexe et C un cycle élémentaire de G de longueur k . Montrer que si G ne contient pas de chaîne élémentaire de longueur supérieure à $k - 1$ alors C est un cycle hamiltonien de G .*

Solution Supposons par l'absurde que C ne contienne pas tous les sommets de G . Le graphe G est connexe, donc, par l'Exercice 28, il existe une arête uv de G telle que $u \in V(C)$ et $v \notin V(C)$. Soit e une arête de C incidente à u . La chaîne $P := (C - e) + uv$ (FIG. 1.36) est élémentaire et de longueur

$$|E(P)| = |E(C - e)| + 1 = k,$$

ce qui est une contradiction.

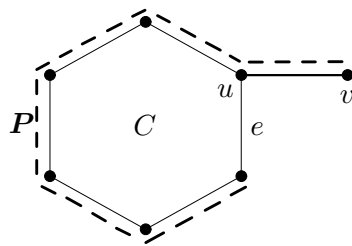


FIGURE 1.36 – La chaîne P de longueur k .

\square

Exercice 38 *Soit X un sous-ensemble non-vide de sommets d'un graphe G . Montrer que si $G - X$ possède plus que $|X|$ composantes connexes, alors G n'est pas hamiltonien.*

Solution Nous allons montrer que si G possède un cycle hamiltonien C , alors le graphe $C - X$ a au plus $|X|$ composantes connexes. Alors, puisque C est un graphe partiel de G , $G - X$ aura lui aussi au plus $|X|$ composantes connexes, ce qui montre la contraposée de l'exercice.

Puisque $X \neq \emptyset$, les composantes connexes de $C - X$ sont des chaînes. En parcourant C à partir d'un sommet quelconque de X , le dernier sommet de chacune de ces chaînes est suivi par un sommet de X (FIG. 1.37). Comme chaque sommet est parcouru exactement une fois, le nombre de sommets de X est supérieur ou égal au nombre de chaînes qui est par définition, égal au nombre de composantes connexes de $C - X$. (On remarque qu'un sommet de X n'est pas forcément précédé par un sommet hors de X , et ainsi le nombre de composantes connexes de $C - X$ peut être strictement inférieur à $|X|$.)

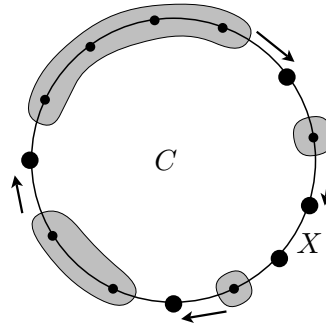


FIGURE 1.37 – Le cycle C , l'ensemble X de sommets représentés par les gros sommets noirs, et les composantes connexes de $C - X$ en grisé.

□

On appelle **cube de dimension d** pour $d \geq 1$, le graphe dont l'ensemble des sommets est égal à l'ensemble des d -uplets à valeur 0 – 1 et deux sommets sont reliés par une arête s'ils diffèrent en exactement une composante. La FIG. 1.38 (a) – (d) représente les cubes de dimension 1, 2, 3 et 4.

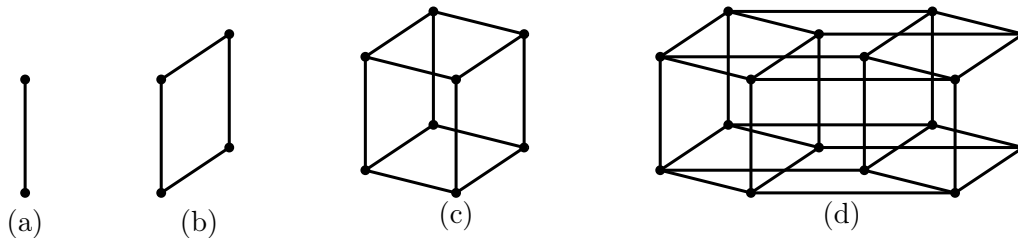


FIGURE 1.38 – (a) Le cube de dimension 1, (b) le cube de dimension 2, (c) le cube de dimension 3, (d) le cube de dimension 4.

Exercice 39 Montrer que le cube de dimension $d \geq 2$ contient un cycle hamiltonien.

Solution On raisonne par récurrence sur la dimension d du cube. Pour $d = 2$, le cube de dimension 2 est un cycle de longueur 4 qui est lui-même un cycle hamiltonien. Supposons que la propriété est vérifiée pour $d \geq 2$.

Soit G le cube de dimension $d + 1$. Soit V_0 (respectivement V_1) l'ensemble des sommets de G dont la dernière composante est égale à 0 (respectivement à 1). Les sous-graphes $G_0 := G[V_0]$ et $G_1 := G[V_1]$ (FIG. 1.39(a)) sont isomorphes au cube de dimension d . (Les bijections sont définies

par la suppression de la dernière composante.) Les arêtes de G entre V_0 et V_1 relient les sommets correspondant au même sommet du cube de dimension d . En vertu de l'hypothèse de récurrence le cube de dimension d contient un cycle hamiltonien C . Soient C_0 et C_1 les cycles hamiltoniens de G_0 et G_1 correspondant à C (FIG. 1.39(b)). On choisit une arête quelconque uv de C . A cette arête correspondent les arêtes u_0v_0 de C_0 et u_1v_1 de C_1 (FIG. 1.39(b)). Par définition, les arêtes u_0u_1 et v_0v_1 existent dans G . En enlevant l'arête u_0v_0 à C_0 on obtient une chaîne hamiltonienne de G_0 d'extrémités u_0 et v_0 . De même, en enlevant l'arête u_1v_1 à C_1 on obtient une chaîne hamiltonienne de G_1 d'extrémités u_1 et v_1 . En rajoutant les arêtes u_0u_1 et v_0v_1 à ces deux chaînes hamiltoniennes on obtient un cycle hamiltonien C^* de G (FIG. 1.39(c)).

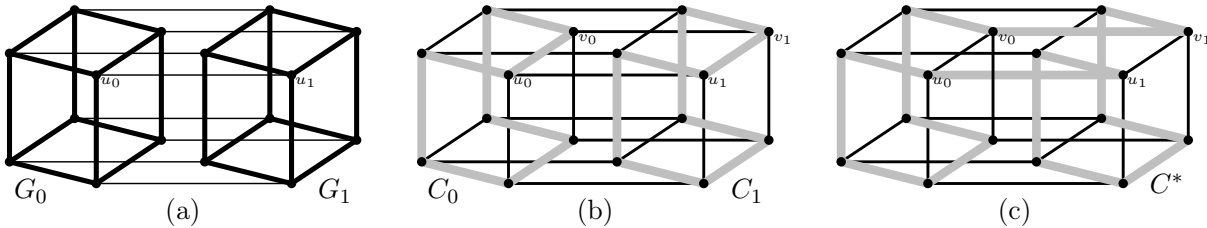


FIGURE 1.39 – Le cas du cube de dimension 4 : (a) Les graphes G_0 et G_1 , (b) les cycles hamiltoniens C_0 de G_0 et C_1 de G_1 , (c) le cycle hamiltonien C^* de G .

□

Exercice 40 (a) Un cube de fromage est constitué de 2^3 petits cubes de même taille (FIG. 1.40(a)). Une souris a l'intention de manger ces 8 petits cubes les uns après les autres, en passant d'un petit cube à un autre situé à côté c'est-à-dire ayant une face en commun avec lui. La souris aimerait commencer son repas avec un petit cube au coin du fromage et le finir avec un petit cube à côté du premier. La souris, peut-elle exécuter son plan ?

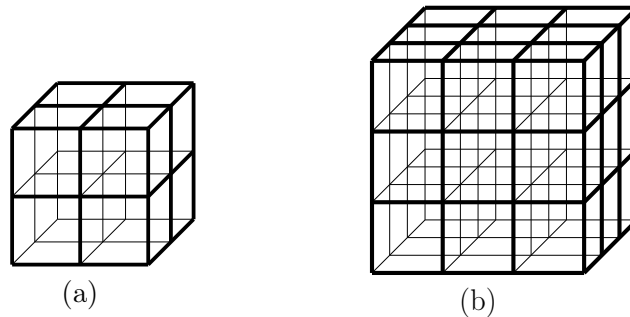


FIGURE 1.40 – (a) Le cube de fromage constitué de 2^3 petits cubes, (b) le cube de fromage constitué de 3^3 petits cubes.

(b) Même question pour un cube de fromage constitué de $27 = 3^3$ petits cubes (FIG. 1.40(b)).

Solution Le problème de la souris peut être exprimé comme un problème de théorie des graphes. Au cube de fromage on associe le graphe G suivant : les sommets sont les petits cubes et deux sommets sont reliés par une arête si les deux petits cubes correspondants sont à côté l'un de l'autre. La question est : ce graphe possède-t-il un cycle hamiltonien ? En effet, deux petits cubes qui peuvent être mangés l'un après l'autre correspondent à une arête du graphe, on cherche donc une chaîne. De plus, tous les petits cubes doivent être mangés, cette chaîne doit donc être hamiltonienne. Enfin, le dernier petit cube doit partager une face avec le premier, par conséquent, la chaîne doit se refermer et ainsi former un cycle hamiltonien.

(a) La réponse est oui. Sur la FIG. 1.41(a) on a représenté le graphe G associé au cube de fromage constitué de 2^3 petits cubes et un cycle hamiltonien en gras.

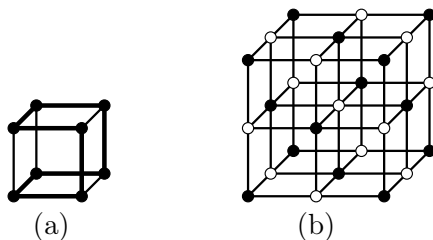


FIGURE 1.41 – (a) Le graphe G associé au cube de fromage constitué de 2^3 petits cubes et un cycle hamiltonien indiqué en gras, (b) le graphe G associé au cube de fromage constitué de 3^3 petits cubes avec une coloration des sommets en blanc et noir.

(b) La réponse est non.

Première démonstration : Sur la FIG. 1.41(b) on a représenté le graphe G et une coloration des sommets en blanc et noir. Soit X l'ensemble des 13 sommets blancs. Puisqu'il n'existe pas d'arête entre les 14 sommets noirs, $G - X$ a 14 composantes connexes. D'après l'Exercice 38, G n'est pas hamiltonien.

Deuxième démonstration : La coloration des sommets en blanc et noir indiquée sur la FIG. 1.41(b) montre que le graphe G est biparti. Par l'Exercice 62, G ne contient pas de cycle de longueur impaire, donc pas de cycle de longueur 27 et donc pas de cycle hamiltonien. □

Exercice 41 (Théorème de Dirac) Soit G un graphe simple à $n \geq 3$ sommets tel que chaque sommet est de degré supérieur ou égal à $n/2$. Montrer que G est hamiltonien.

Solution Soit $P = v_1 v_2 \dots v_k$ une chaîne élémentaire de G de longueur maximum. Soient N et L l'ensemble des voisins respectivement de v_1 et de v_k . Puisque G est simple et par l'hypothèse sur les degrés des sommets de G , on a $|N| = d(v_1) \geq \frac{n}{2}$ et $|L| = d(v_k) \geq \frac{n}{2}$. Par l'Exercice 25, $N \subseteq \{v_2, \dots, v_k\}$. Soit $N^- = \{v_i : v_{i+1} \in N\}$. On a $|N^-| = |N|$ et $v_k \notin N^-$. Puisque $|N^- \cup L| \leq |V \setminus \{v_k\}| \leq n - 1$ et $|N^-|, |L| \geq \frac{n}{2}$, on a $N^- \cap L \neq \emptyset$; soit donc $v_i \in N^- \cap L$. Alors la concaténation de $P[v_{i+1} v_k]$, de l'arête $v_k v_i$, de $P[v_1 v_i]$ prise à rebours et de l'arête $v_1 v_{i+1}$ constitue un cycle C de longueur k . Or, par l'Exercice 30, le graphe G est connexe et donc par l'Exercice 37, C est un cycle hamiltonien de G (FIG. 1.42).

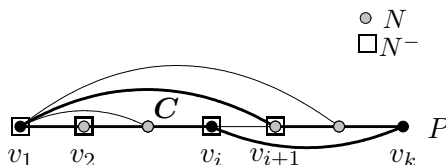


FIGURE 1.42 – Démonstration du Théorème de Dirac. □

1.5 Graphes eulériens

Étant donné un graphe G , un cycle C de G est dit **cycle eulérien** de G si C contient toutes les arêtes de G ; similairement, une chaîne simple P de G est dite **chaîne eulérienne** si

P contient toutes les arêtes de G . Un graphe G est dit **graphe eulérien** s'il possède un cycle eulérien.

Exercice 42 Pour chaque graphe de la FIG. 1.43, est-il possible, sans lever le crayon, de tracer chaque arête exactement une fois ? Justifier les réponses.

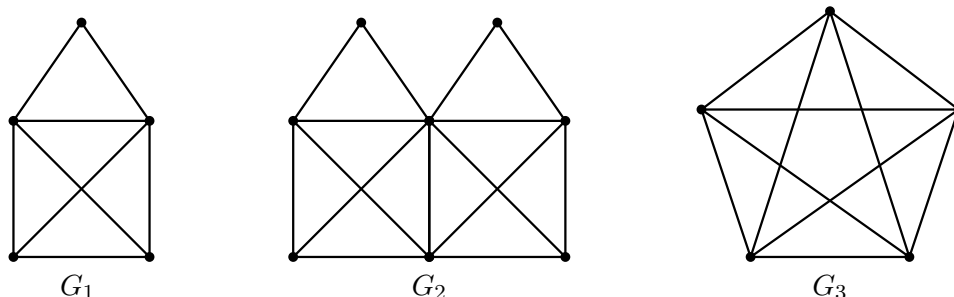


FIGURE 1.43 – Les graphes de l'Exercice 42.

Solution Remarquons que, pour un graphe G , il est possible, sans lever le crayon, de tracer chaque arête exactement une fois si et seulement si G possède une chaîne eulérienne ou un cycle eulérien.

La numérotation des arêtes de G_1 indiquée sur la FIG. 1.44 correspond à une chaîne eulérienne de G_1 , et la réponse pour G_1 est donc affirmative.

Pour le graphe G_2 la réponse est non. En effet, supposons qu'il y ait une solution pour G_2 . Chaque sommet qui n'est ni le premier ni le dernier sommet visité lors du traçage des arêtes est de degré pair, puisque les arêtes qui lui sont incidentes sont partitionnées en k paires correspondant aux k passages du crayon par ce sommet. Par conséquent, G_2 devrait contenir au plus deux sommets de degré impair. Or, les trois sommets de G_2 indiqués sur la FIG. 1.44 sont de degré impair.

La numérotation des arêtes de G_3 indiquée sur la FIG. 1.44 correspond à un cycle eulérien de G_3 , et la réponse pour G_3 est donc affirmative.

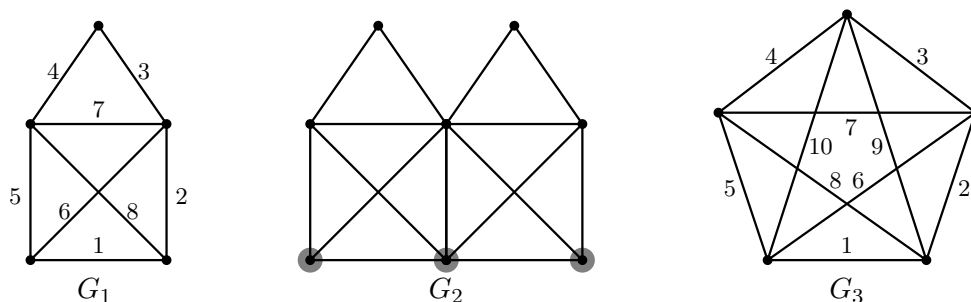


FIGURE 1.44 – Justification des réponses à l'Exercice 42.

□

Exercice 43 Montrer que pour un graphe G les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) Il existe une partition des arêtes de G en cycles élémentaires.
- (b) Il existe une partition des arêtes de G en cycles.
- (c) Tous les sommets de G ont un degré pair.

Solution (a) \implies (b) : C'est évident.

(b) \implies (c) : Soient C_1, \dots, C_k , des cycles de G tels que chaque arête de G appartient à un et un seul de ces cycles. Soit v un sommet quelconque de G . Pour chaque cycle C_i , en le parcourant, à toute arête précédant v correspond une arête succédant à v . Donc le nombre d'arêtes incidentes à v contenues dans C_i est égal à deux fois le nombre d'occurrences du sommet v dans C_i , c'est-à-dire $d_{C_i}(v)$ est pair. De plus, chaque arête incidente à v appartient à un unique C_i ($1 \leq i \leq k$), donc $d_G(v) = \sum_{i=1}^k d_{C_i}(v)$. Le fait qu'une somme de nombres pairs est un nombre pair permet de conclure que le degré de v est pair.

(c) \implies (a) : Montrons, par récurrence sur $m = |E(G)|$, que (c) implique (a). Si $m = 0$, alors il n'y a rien à prouver. Supposons donc que (c) implique (a) pour les graphes dont le nombre d'arêtes est strictement plus petit que m ($m \geq 1$). Soit G un graphe satisfaisant (c) possédant m arêtes.

Montrons d'abord que G contient un cycle élémentaire. Puisque l'ensemble des arêtes de G n'est pas vide, il existe G_1 , une composante connexe de G , qui contient au moins une arête. Alors les degrés des sommets de G_1 sont les mêmes dans G_1 et dans G et chaque sommet de G_1 est incident à au moins une arête. Par conséquent, G_1 lui aussi, satisfait (c). Pour tout $v \in V(G_1)$, $d_{G_1}(v) \geq 1$ et est pair donc $d_{G_1}(v) \geq 2$. D'après l'Exercice 25(b), G_1 , et donc G , contient un cycle élémentaire C .

Soit G' le graphe obtenu à partir de G en supprimant les arêtes de C . On a $|E(G')| < m$. Pour chaque sommet v de G , si $v \in V(C)$ alors on a supprimé deux arêtes incidentes à v et sinon on n'a supprimé aucune arête incidente à v . Donc G' , comme G , satisfait (c). En vertu de l'hypothèse de récurrence, il existe un ensemble de cycles élémentaires C_1, \dots, C_k qui partitionnent $E(G') = E(G) \setminus E(C)$. Donc $E(G)$ est l'union disjointe des cycles élémentaires C_1, C_2, \dots, C_k et C . \square

Exercice 44 *Montrer que dans un graphe G , toutes les coupes sont de cardinal pair si et seulement si tous les sommets sont de degré pair.*

Solution Si chacune des coupes est de cardinal pair, alors en particulier, chaque sommet est de degré pair. Pour démontrer l'implication réciproque, on suppose que tous les sommets sont de degré pair et on considère un sous-ensemble S de sommets. Alors, par l'Exercice 9,

$$|\delta(S)| = \sum_{v \in S} \underbrace{d(v)}_{\text{pair}} - 2 \underbrace{|E(G[S])|}_{\text{pair}},$$

et donc le cardinal de la coupe engendrée par S est pair. \square

Exercice 45 *Montrer que dans un graphe G , un cycle et une coupe quelconques ont un nombre pair d'arêtes en commun.*

Solution Dans G , soit C l'ensemble des arêtes d'un cycle et soit $\delta_G(S)$ une coupe. Dans le graphe partiel $G(C)$, par l'Exercice 43, tous les sommets sont de degré pair et donc par l'Exercice 44, $\delta_{G(C)}(S)$ est de cardinal pair. Or $\delta_{G(C)}(S)$ coïncide avec l'intersection de C et $\delta_G(S)$. \square

Exercice 46 *Montrer qu'un graphe G sans sommet isolé est eulérien si et seulement si il est connexe et tous ses sommets sont de degré pair.*

Solution Montrons tout d'abord que la condition est nécessaire. Supposons donc que G possède un cycle eulérien C . Puisque G n'a pas de sommet isolé, tous ses sommets appartiennent à C .

Pour n'importe quel couple u, v , en parcourant le cycle C , on a une (u, v) -chaîne (en fait on en a deux), donc le graphe est connexe. Par la définition d'un cycle eulérien et par l'Exercice 43, tous les sommets de G sont de degré pair.

Pour vérifier que la condition est suffisante, supposons que G est un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré pair. D'après l'Exercice 43, il existe une partition des arêtes de G en cycles. Soit \mathcal{C} une telle partition en un nombre minimum de cycles. Puisque G est sans sommet isolé, G contient au moins une arête et ainsi \mathcal{C} contient au moins un cycle. Il faut montrer que \mathcal{C} contient exactement un cycle.

Supposons qu'il existe un sommet v appartenant à deux cycles distincts C_1 et C_2 de \mathcal{C} . En remplaçant une occurrence quelconque de v dans C_1 par C_2 on obtient un nouveau cycle C tel que $E(C) = E(C_1) \cup E(C_2)$. L'ensemble de cycles $\mathcal{C}' = (\mathcal{C} \setminus \{C_1, C_2\}) \cup C$ est une partition des arêtes de G telle que $|\mathcal{C}'| < |\mathcal{C}|$, ce qui contredit notre hypothèse sur \mathcal{C} .

Par conséquent, les cycles dans \mathcal{C} sont sommet-disjoints. Puisque, de plus, ces cycles contiennent toutes les arêtes de G , les arêtes incidentes à un sommet appartiennent toutes à un même cycle de \mathcal{C} et donc toutes celles d'une composante connexe également. Ceci implique que les composantes connexes de G et les cycles de \mathcal{C} coïncident. Mais G est connexe, donc \mathcal{C} contient un seul cycle \square

Remarque 14 *L'existence d'un cycle eulérien dans un graphe n'est pas affectée par l'ajout ou la suppression de sommets isolés. Par conséquent, l'Exercice 46 est équivalent à : un graphe G contenant au moins une arête est eulérien si et seulement si toutes les arêtes de G sont dans la même composante connexe de G et tous les sommets de G sont de degré pair.*

Exercice 47 *Montrer qu'un graphe G contient une chaîne eulérienne d'extrémités distinctes u et v si et seulement si toutes les arêtes de G sont dans la même composante connexe de G et u et v sont les seuls sommets de G de degré impair.*

Solution Soient G un graphe, u et v deux sommets distincts de G . On remarque d'une part que G contient une chaîne eulérienne d'extrémités distinctes u et v si et seulement si $G + uv$ contient un cycle eulérien. D'autre part, u et v sont les seuls sommets de G de degré impair si et seulement si tous les sommets de $G + uv$ sont de degré pair. Par la Remarque 14 appliquée au graphe $G + uv$, on obtient le résultat voulu. \square

Remarque 15 *Par la Remarque 14 et l'Exercice 47, un graphe G contient une chaîne eulérienne d'extrémités u et v si et seulement si toutes les arêtes de G sont dans la même composante connexe de G et zéro ou deux sommets de G sont de degré impair.*

Exercice 48 (Justification de l'algorithme Cycle Eulérien (FIG. 1.46))

- (a) *Montrer que la procédure Cycle (FIG. 1.45), appliquée au graphe H dont tous les sommets sont de degré pair et à un de ses sommets non isolés v , se termine avec une suite C' qui est un cycle qui contient au moins une arête et qui commence et se termine par v , et un graphe H' égal à $H - E(C)$.*
- (b) *Montrer que l'algorithme Cycle Eulérien, appliqué au graphe connexe G dont tous les sommets sont de degré pair, se termine avec une suite C qui est un cycle eulérien.*

Solution (a) Au départ $H' = H$ et à chaque fois qu'une arête est placée dans C' elle est aussi ôtée de H' , le nombre d'arêtes de H étant fini, l'algorithme s'arrêtera. Il reste à montrer que C' a bien les propriétés voulues. La suite C' commence par v , et puisque v n'est pas isolé, après la première itération de l'Étape 2, C' contient au moins une arête. Ensuite à chaque itération

PROCÉDURE CYCLE :

ENTRÉE : Un graphe H dont tous les sommets sont de degré pair et un sommet v de H qui n'est pas isolé.

SORTIE : Un cycle C' de H , qui contient au moins une arête, donné sous la forme d'une suite qui commence et termine par v et le graphe H' obtenu à partir de H en supprimant les arêtes de ce cycle.

Étape 1 : *Initialisation.*
 $C' := v, w := v, H' := H.$

Étape 2 : *Construction du cycle.*
 Tant que w n'est pas un sommet isolé dans H' faire :
 choisir une arête $e = wz$ de H' incidente à w ,
 $C' := C'ez,$
 $H' := H' - e,$
 $w := z.$
 Arrêter avec C' et H' .

FIGURE 1.45 – Procédure Cycle.

de l'Étape 2 on rajoute une arête adjacente à la précédente et qui n'est pas déjà dans C' , donc C' est une chaîne ou un cycle. Si après la dernière itération de l'Étape 2, C' est un cycle, alors son dernier sommet est v et il n'y a plus rien à démontrer. Supposons donc que C' soit une chaîne d'extrémités distinctes v et v' . Alors v' est incident à un nombre impair d'arêtes de C' , et puisque $d_H(v')$ est pair et $H' = H - E(C)$ on a $d_{H'}(v')$ impair et donc supérieur ou égal à 1 : v' n'est pas un sommet isolé de H' et la construction de C' aurait pu continuer. On a abouti à une contradiction, donc C' a bien toutes les propriétés voulues.

(b) Dans cet exercice on considérera momentanément qu'une suite d'un seul sommet u est un cycle de u à u : ainsi à la fin de l'Étape 1, C est un cycle, et $H = G - E(C)$. Par (a), si les conditions de la procédure Cycle sont bien vérifiées, alors à chaque itération de l'Étape 2, la suite C' calculée, qui commence par un sommet v appartenant à C , est un cycle arête-disjoint de C . Celui-ci est ensuite inséré dans C à la place de la première occurrence de v de manière à obtenir un nouveau cycle C plus long que le précédent ; et ses arêtes sont supprimées de manière à obtenir un nouveau graphe H ayant moins d'arêtes que le précédent. Le nombre d'arêtes de G étant fini, l'algorithme se termine. Pour montrer qu'il fonctionne il suffit de vérifier que les conditions de la procédure Cycle sont bien vérifiées :

- au début de chaque itération de l'Étape 2, H est un graphe dont tous les sommets sont de degré pair, puisqu'il est égal au graphe obtenu à partir de G en supprimant les arêtes du cycle C ,

- tant que C ne contiendra pas toutes les arêtes de G , il y aura un sommet v de C incident à une arête qui n'est pas dans C : en effet sinon, le sous-graphe de G induit par les sommets de C est une composante connexe de G , et puisque G est connexe, il est égal à G lui-même. \square

Exercice 49 (Justification de l'algorithme de Fleury (FIG. 1.47))

Soient C_i, G_i et u_i la suite, le graphe et le sommet de la i -ième itération de l'Étape 2 de l'algorithme de Fleury appliqué au graphe G pour $1 \leq i \leq k$ ($\leq |E(G)|$), où k est le nombre d'itérations de l'Étape 2.

- (a) Montrer que les ensembles d'arêtes de C_i et de G_i forment une bipartition de l'ensemble des arêtes de G .
- (b) Montrer que C_i est une chaîne simple d'extrémités u_0 et u_i .

ALGORITHME CYCLE EULÉRIEN :

ENTRÉE : Un graphe connexe G dont tous les sommets sont de degré pair et qui contient au moins une arête.

SORTIE : Un cycle eulérien C de G .

Etape 1 : *Initialisation.*
 Choisir un sommet u de G , $C := u, H := G$.

Etape 2 : *Construction du cycle.*
 Tant que H contient une arête faire :
 Choisir un sommet v de C qui n'est pas isolé dans H ,
 Appliquer la procédure Cycle à H et v , pour obtenir le cycle C' et le graphe H' .
 $H := H'$.
Concaténation de C et C' .
 soient C_1 la sous-suite de C qui précède la première occurrence de v dans C , et
 C_2 celle qui suit : $C = C_1vC_2$,
 $C := C_1C'C_2$.
 Arrêter avec C .

FIGURE 1.46 – Algorithme Cycle Eulérien.

(c) Montrer que G_i contient une chaîne eulérienne d'extrémités u_0 et u_i .

(d) Montrer qu'une suite C construite par l'algorithme de Fleury est un cycle eulérien de G .

Solution (a) On va procéder par récurrence sur i . Pour $i = 0$, $E(C_0) = \emptyset$ et $E(G_0) = E(G)$. Ensuite, pour chaque i ($0 \leq i \leq k - 1$), C_{i+1} est obtenu en rajoutant à C_i l'arête u_iu_{i+1} qu'on enlève de G_i pour obtenir G_{i+1} . La propriété de bipartition est donc conservée.

(b) On va procéder par récurrence sur i . Pour $i = 0$, $C_0 = u_0$ est une chaîne simple entre u_0 et u_0 . Supposons que pour un i ($0 \leq i \leq k - 1$), C_i soit une chaîne simple entre u_0 et u_i . Par définition, C_{i+1} est obtenue à partir de C_i en rajoutant une arête u_iu_{i+1} de G_i qui par (a), n'appartient pas à C_i . Par conséquent, C_{i+1} est une chaîne simple d'extrémités u_0 et u_{i+1} . La propriété (b) est bien vérifiée pour $i + 1$.

(c) On va procéder par récurrence sur i . Pour $i = 0$, puisque $G_0 = G$ est connexe et tous ses sommets sont de degré pair, par l'Exercice 46, il existe un cycle eulérien de G_0 qui par la Remarque 6, est une chaîne eulérienne de G_0 d'extrémités u_0 et u_0 , (c) est bien vérifiée. Supposons maintenant que (c) est vérifiée pour un i ($0 \leq i \leq k - 1$), c'est-à-dire que G_i contient une chaîne eulérienne P_i d'extrémités u_0 et u_i . Deux cas sont à considérer.

Cas 1 : L'arête u_iu_{i+1} n'appartient pas à un cycle de G_i . Alors, puisque l'algorithme a choisi cette arête, aucune arête de G_i incidente à u_i n'appartient à un cycle de G_i et P_i passe donc une seule fois par u_i , c'est-à-dire que u_iu_{i+1} est la seule arête de G_i incidente à u_i . Par conséquent, $P_i - u_iu_{i+1}$ est une chaîne eulérienne de $G_{i+1} = G_i - u_iu_{i+1}$ d'extrémités u_0 et u_{i+1} . La propriété (c) est bien vérifiée pour $i + 1$.

Cas 2 : L'arête u_iu_{i+1} appartient à un cycle de G_i .

Par l'existence de la chaîne eulérienne P_i de G_i , toutes les arêtes de G_i sont dans la même composante connexe de G_i qui contient donc u_i et u_{i+1} . Par l'Exercice 31, $G_{i+1} = G_i - u_iu_{i+1}$ a les mêmes composantes connexes que G_i , donc toutes les arêtes de G_{i+1} sont dans la même composante connexe de G_{i+1} qui contient u_{i+1} .

Par (a) et le fait que tous les sommets de G sont de degré pair, on a que la parité du degré de chaque sommet est la même dans G_{i+1} et dans C_{i+1} . Or par (b), C_{i+1} est une chaîne simple d'extrémités u_0 et u_{i+1} , c'est-à-dire que :

ALGORITHME DE FLEURY :

ENTRÉE : Un graphe connexe G dont tous les sommets sont de degré pair.
 SORTIE : Un cycle eulérien C de G .

Etape 1 : *Initialisation.*
 Choisir un sommet u_0 de G , $C_0 := u_0$, $G_0 := G$, $i := 0$.

Etape 2 : *Construction du cycle.*
 Tant que u_i n'est pas un sommet isolé de G_i faire :
 Choisir une arête $e_{i+1} = u_i u_{i+1}$ de G_i incidente à u_i , si possible contenue dans un cycle de G_i .
 $C_{i+1} := C_i e_{i+1} u_{i+1}$,
 $G_{i+1} := G_i - e_{i+1}$,
 $i := i + 1$.

Etape 3 : *Fin de l'algorithme.*
 $C := C_i$,
 STOP.

FIGURE 1.47 – Algorithme de Fleury.

- si $u_0 = u_{i+1}$, alors dans G_{i+1} , comme dans C_{i+1} , tous les sommets sont de degré pair. Par la Remarque 14, il existe un cycle eulérien de G_{i+1} qui contient u_{i+1} . Par la Remarque 6, celui-ci est une chaîne eulérienne de G_{i+1} d'extrémités u_{i+1} et $u_{i+1} = u_0$, (c) est bien vérifiée pour $i + 1$.

- si $u_0 \neq u_{i+1}$, alors dans G_{i+1} , comme dans C_{i+1} , tous les sommets, à l'exception de u_0 et u_{i+1} , sont de degré pair. Par l'Exercice 47, G_{i+1} contient une chaîne eulérienne d'extrémités u_0 et u_{i+1} . La propriété (c) est bien vérifiée pour $i + 1$.

(d) Par (c), quand l'algorithme s'arrête, G_i n'a plus d'arête, et ainsi par (a) et (b), C_i est un cycle eulérien de G . \square

Exercice 50 Soit G un graphe connexe. Montrer qu'on peut colorier toutes les arêtes de G avec du rouge et du bleu de telle sorte que, pour chaque sommet v , le nombre d'arêtes rouges incidentes à v est égal au nombre d'arêtes bleues incidentes à v si et seulement si G a tous ses sommets de degré pair et a un nombre pair d'arêtes.

Solution Montrons tout d'abord que la condition est nécessaire. Supposons donc qu'il existe une telle coloration, et soit G_r le sous-graphe partiel de G induit par les arêtes rouges. Puisque pour chaque sommet v , le nombre d'arêtes rouges incidentes à v est égal au nombre d'arêtes bleues incidentes à v , on a $d_G(v) = 2d_{G_r}(v)$, et donc v est de degré pair. De plus, d'après l'Exercice 4,

$$|E(G)| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d_G(v) = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} 2d_{G_r}(v) = 2|E(G_r)|,$$

et ainsi le nombre d'arêtes de G est pair.

Pour montrer l'autre direction de l'équivalence, on suppose que G est un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré pair et dont le nombre d'arêtes est pair. D'après l'Exercice 46, G possède un cycle eulérien $C := v_0 e_1 v_1 \dots e_m$. On colorie l'arête e_i en rouge si i est impair et en bleu si i est pair. Ainsi, deux arêtes consécutives de C sont de couleurs différentes, même pour e_m et e_1 puisque m est pair. Par conséquent, pour un sommet v quelconque, l'ensemble des arêtes incidentes à v se partitionne en couples d'arêtes de couleurs différentes et donc le nombre d'arêtes rouges incidentes à v est égal au nombre d'arêtes bleues incidentes à v . \square

Exercice 51 *Montrer qu'on peut partitionner les arêtes d'un graphe G en deux sous-ensembles qui induisent chacun un graphe partiel 2-régulier si et seulement si G est 4-régulier.*

Solution Montrons d'abord que la condition est nécessaire. Soit $\{E_1, E_2\}$ une telle partition, chaque sommet de G est alors incident à deux arêtes de E_1 et deux arêtes de E_2 , il est donc de degré 4 dans G .

Montrons maintenant que la condition est suffisante, c'est-à-dire que si G est un graphe 4-régulier alors on peut partitionner ses arêtes en deux sous-ensembles qui induisent chacun un graphe partiel 2-régulier. Si chacune des composantes connexes de G vérifie cette propriété alors elle sera vérifiée par G lui-même. On suppose donc que G est connexe. D'après l'Exercice 4,

$$|E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v) = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} 4 = \frac{1}{2} 4|V| = 2|V|,$$

et ainsi le nombre d'arêtes de G est pair. D'après l'Exercice 50, on peut donc colorier les arêtes de G avec du rouge et du bleu de telle sorte que chaque sommet soit incident à deux arêtes rouges et à deux arêtes bleues. L'ensemble des arêtes rouges et l'ensemble des arêtes bleues forment la partition voulue. □

1.6 Coloration

Une **coloration des sommets** d'un graphe G est une fonction c de l'ensemble des sommets de G dans un ensemble de couleurs \mathcal{C} . Lorsque le nombre de couleurs dans \mathcal{C} est k on dit que c est une **k -coloration** et on supposera généralement que $\mathcal{C} = \{1, 2, \dots, k\}$.

Remarque 16 *Par définition, une k -coloration des sommets est aussi une k' -coloration des sommets, pour tout $k' \geq k$.*

Une coloration c des sommets d'un graphe G est dite **propre** si, pour toute arête de G les couleurs attribuées à ses extrémités sont distinctes, c'est-à-dire $c(u) \neq c(v)$ pour tout $uv \in E(G)$. Des exemples de colorations propres sont représentés sur la FIG. 1.48.

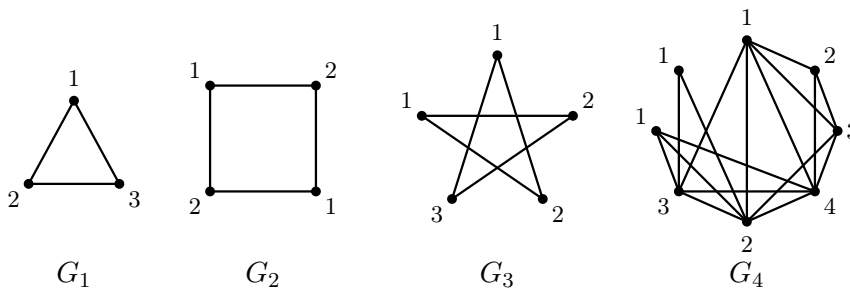


FIGURE 1.48 – Colorations propres des graphes G_1, G_2, G_3, G_4 .

En attribuant une couleur différente à chacun des n sommets d'un graphe G , on obtient une coloration propre des sommets de G , quelles que soient ses arêtes. Par conséquent, G possède une n -coloration propre des sommets. On appelle **nombre chromatique** du graphe G , noté $\chi(G)$, le plus petit k tel qu'il existe une k -coloration propre des sommets de G . Par ce qui précède, $\chi(G) \leq n$. Une $\chi(G)$ -coloration propre des sommets de G sera dite **optimale**. Un graphe sera dit **k -coloriable** si son nombre chromatique est inférieur ou égal à k . Une **clique** d'un graphe G est un sous-ensemble de sommets de G deux à deux adjacents. On note $\omega(G)$ le cardinal maximum d'une clique de G .

Exercice 52 Montrer que pour tout graphe G , on a $\omega(G) \leq \chi(G)$.

Solution Soit K une clique de G de cardinal $\omega(G)$. Par définition, dans une coloration propre des sommets de G , il n'y a pas deux sommets de K qui soient de la même couleur ; ceci implique l'inégalité. \square

Un **stable** d'un graphe G est un sous-ensemble de sommets de G qui ne contient aucune arête de G . On note $\alpha(G)$ le cardinal maximum d'un stable de G . Par définition, un stable de G est une clique de \overline{G} , une clique de G est un stable de \overline{G} , et ainsi $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$ et $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$.

Exercice 53 Montrer qu'une k -coloration propre des sommets d'un graphe G est équivalente à une partition des sommets de G en au plus k stables.

Solution Soit $c : V \rightarrow \mathcal{C}$, une k -coloration propre des sommets d'un graphe $G = (V, E)$, sans perte de généralité on peut supposer que $\mathcal{C} = \{1, 2, \dots, k\}$. Soit S_i l'ensemble des sommets de V auxquels c attribue la couleur i , pour $i = 1, \dots, k$. Puisque c est une coloration, l'ensemble des S_i qui sont non vides est une partition de V en au plus k ensembles, et puisqu'elle est propre, ces ensembles sont des stables de G .

Réciproquement, si $\mathcal{P} = \{S_1, \dots, S_\ell\}$, où $\ell \leq k$, est une partition de V telle que chaque S_i est un stable de G , alors en attribuant à chaque sommet v l'indice de l'ensemble de \mathcal{P} qui le contient on obtient une k -coloration propre des sommets de G .

L'équivalence entre une coloration propre des sommets et une partition en stables est représentée sur la FIG. 1.49. \square

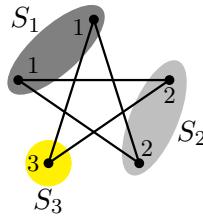


FIGURE 1.49 – Relation entre une coloration propre des sommets et une partition en stables.

Exercice 54 Soit G un graphe à n sommets. Montrer que $n \leq \chi(G) \cdot \alpha(G)$.

Solution Par l'Exercice 53 et la définition de $\chi(G)$, il existe une partition des sommets de G en $\chi(G)$ ensembles stables $S_1, \dots, S_{\chi(G)}$. Or chacun de ces stables contient au plus $\alpha(G)$ éléments et l'on a donc $n = |S_1| + \dots + |S_{\chi(G)}| \leq \chi(G) \cdot \alpha(G)$. \square

Remarque 17 On remarque que si G est un graphe complet, alors les inégalités des Exercices 52 et 54 sont vérifiées avec égalité.

Exercice 55 Soient $W = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ un sous-ensemble de r sommets d'un graphe G , c une k -coloration propre des sommets de G qui colorie différemment chacun des sommets de W , \mathcal{C} l'ensemble des couleurs de c , et $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r\}$ un sous-ensemble de r couleurs distinctes de \mathcal{C} . Montrer qu'il existe une k -coloration propre c' des sommets de G qui attribue la couleur γ_i à chaque v_i ($i = 1, 2, \dots, r$).

Solution Par l'Exercice 53, il existe une partition \mathcal{P} des sommets de G en au plus k stables associée à c . Soit S_{v_i} le stable de \mathcal{P} qui contient le sommet v_i , $i = 1, 2, \dots, r$. Par hypothèse on a $S_{v_i} \neq S_{v_j}$ dès que $i \neq j$. La coloration c' qui attribue la couleur γ_i à l'ensemble des sommets de S_{v_i} ($i = 1, 2, \dots, r$) et une couleur distincte de $\mathcal{C} \setminus \{\gamma_{v_1}, \gamma_{v_2}, \dots, \gamma_{v_r}\}$ à l'ensemble des sommets de S pour chaque S de $\mathcal{P} \setminus \{S_{v_1}, S_{v_2}, \dots, S_{v_r}\}$ est la coloration voulue. \square

Exercice 56 Soit $G = (V, E)$ un graphe et $k \geq 0$ un entier.

- (a) Montrer que si chaque sous-graphe G' de G contient un sommet v tel que $d_{G'}(v) \leq k$ alors $\chi(G) \leq k + 1$.
- (b) En déduire que $\chi(G) \leq \Delta + 1$, pour $\Delta = \Delta(G)$ le degré maximum dans G .
- (c) Montrer qu'il existe, pour tout entier $k \geq 1$ un graphe de nombre chromatique 2 et de degré maximum k .

Solution (a) On raisonne par récurrence sur le nombre n de sommets de G . Pour $n = 1$, $\chi(G) = 1 \leq k + 1$. Supposons que la propriété soit vraie pour un graphe ayant au plus n sommets. Soit G un graphe à $n + 1$ sommets dont tout sous-graphe possède un sommet de degré inférieur ou égal à k . Alors G lui-même possède un sommet v tel que $d_G(v) \leq k$. Le graphe $G - v$ a n sommets et puisque chacun de ses sous-graphes est un sous-graphe de G , ceux-ci vérifient la propriété. En vertu de l'hypothèse de récurrence, il existe donc une $(k + 1)$ -coloration propre c des sommets de $G - v$ avec ensemble de couleurs \mathcal{C} de taille $k + 1$. Puisque $d_G(v) \leq k$, cette coloration c utilise au plus k couleurs pour les voisins de v , il reste donc au moins une couleur $\gamma \in \mathcal{C}$ disponible pour v et en coloriant v avec γ (c'est-à-dire $c(v) = \gamma$) on étend c de manière à obtenir une $(k + 1)$ -coloration propre des sommets de G .

(b) Pour tout sous-graphe G' de G et pour tout sommet v de G' on a $d_{G'}(v) \leq d_G(v) \leq \Delta$. Pour $k = \Delta$ on obtient par (a) que G est $(\Delta + 1)$ -coloriable et donc $\chi(G) \leq \Delta + 1$.

(c) Le graphe "étoile" constitué de $k + 1$ sommets v_0, v_1, \dots, v_k et de k arêtes v_0v_i ($1 \leq i \leq k$) est de degré maximum k et il existe une 2-coloration propre c de ses sommets : $c(v_0) = 1$ et $c(v_i) = 2$ pour tout $1 \leq i \leq k$. \square

Exercice 57 Soit $G = (V, E)$ un graphe.

- (a) Montrer que pour tout sommet x de G , l'une des deux assertions suivantes est vérifiée :
 - 1) $\chi(G) = \chi(G - x)$,
 - 2) $\chi(G) = \chi(G - x) + 1$ et $d_G(x) \geq \chi(G - x)$.
- (b) En déduire que $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq |V| + 1$.

Solution (a) Remarquons tout d'abord que la restriction à $V \setminus \{x\}$ d'une coloration propre des sommets de G est une coloration propre des sommets de $G - x$, et donc $\chi(G) \geq \chi(G - x)$. Supposons que la première assertion ne soit pas vérifiée, alors $\chi(G) > \chi(G - x)$.

Soit c une coloration optimale des sommets de $G - x$ avec les couleurs $1, 2, \dots, \chi(G - x)$. S'il existait une couleur i , $1 \leq i \leq \chi(G - x)$, qui n'est attribuée à aucun voisin de x , alors en coloriant x avec i (c'est-à-dire en posant $c(x) = i$) on étend c de manière à obtenir une $\chi(G - x)$ -coloration propre des sommets de G et ceci contredirait notre hypothèse $\chi(G) > \chi(G - x)$. Donc toutes les $\chi(G - x)$ couleurs apparaissent dans le voisinage de x , et pour cela il faut que x ait au moins $\chi(G - x)$ voisins dans G . En attribuant une nouvelle couleur à x on obtient une coloration propre c' des sommets de G en $\chi(G - x) + 1$ couleurs ; en conséquence on a $\chi(G) \leq \chi(G - x) + 1$. Comme on a supposé que $\chi(G) > \chi(G - x)$ on en déduit que $\chi(G) = \chi(G - x) + 1$ et la deuxième assertion est bien vérifiée.

(b) On procède par récurrence sur le nombre n de sommets de G .

ALGORITHME SÉQUENTIEL DE COLORATION DES SOMMETS :

ENTRÉE : Un graphe G à n sommets, un ordre v_1, v_2, \dots, v_n des sommets de G .

SORTIE : Une coloration propre c des sommets de G et le nombre k de couleurs utilisées par c .

Étape 0 : *Initialisation.*
 $c(v_1) := 1$ $k := 1$,

Étape 1 : *Suite de la coloration.*
 Pour $i := 2$ à n faire
 si toutes les couleurs de 1 à k apparaissent dans le voisinage déjà colorié de v_i alors $c(v_i) := k + 1$ et $k := k + 1$
 sinon $c(v_i) := \min\{l : c(v_j) \neq l \text{ pour tout } j < i \text{ tel que } v_j \in N(v_i)\}$.

FIGURE 1.50 – Algorithme Séquentiel de Coloration des Sommets.

Si $n = 1$, alors $\chi(G) = \chi(\overline{G}) = 1$ et $\chi(G) + \chi(\overline{G}) = 2 = |V(G)| + 1$. L'inégalité est bien vérifiée (avec égalité).

On suppose maintenant que l'inégalité est vraie pour tout graphe à n sommets, et on considère un graphe G à $n + 1$ sommets. Soit x un sommet quelconque de G . Par l'hypothèse de récurrence, le fait évident que $\overline{G - x} = \overline{G} - x$, et par (a) appliqué à G et aussi à \overline{G} , on a

- (i) $\chi(G - x) + \chi(\overline{G} - x) \leq |V(G - x)| + 1 = n + 1$,
- (ii) $\chi(G) \leq \chi(G - x) + 1$
- (iii) $\chi(\overline{G}) \leq \chi(\overline{G} - x) + 1$.

Ainsi si l'une des inégalités (ii) ou (iii) est stricte, par (i) on a bien l'inégalité voulue pour G :

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq \chi(G - x) + \chi(\overline{G} - x) + 1 \leq n + 2 = |V(G)| + 1.$$

Si au contraire (ii) et (iii) sont des égalités, alors par (a) on a $d_G(x) + 1 \geq \chi(G - x) + 1 = \chi(G)$ et $d_{\overline{G}}(x) + 1 \geq \chi(\overline{G} - x) + 1 = \chi(\overline{G})$. Or $d_G(x) + d_{\overline{G}}(x)$ est égal au degré d'un sommet dans le graphe complet d'ordre $n + 1$, c'est-à-dire n , et l'on obtient

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq d_G(x) + 1 + d_{\overline{G}}(x) + 1 = n + 2 = |V(G)| + 1,$$

et l'inégalité voulue est bien vérifiée par G . □

Exercice 58 Exécuter l'Algorithme Séquentiel de Coloration des Sommets (FIG. 1.50) sur les graphes de la FIG. 1.51 munis de l'ordre des sommets indiqué. Pour quels graphes la coloration des sommets obtenue est-elle optimale ? Justifier chacune des réponses.

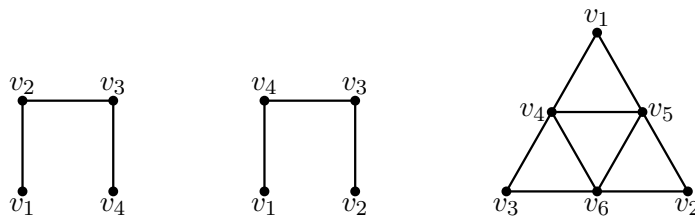


FIGURE 1.51 – Les graphes munis d'un ordre sur les sommets de l'Exercice 58.

Solution En appliquant l'algorithme séquentiel au graphe de gauche de la FIG. 1.51, suivant les labels indiqués, on donnera la couleur 1 à v_1 , puis on devra donner la couleur 2 à v_2 (c'est la

plus petite couleur disponible pour colorier v_2 puisqu'il est adjacent au sommet v_1 déjà colorié 1). La couleur 1 sera alors disponible pour colorier v_3 et on terminera en donnant la couleur 2 à v_4 . La coloration obtenue (représentée sur la FIG. 1.52) est propre par définition de l'algorithme et elle est optimale puisqu'elle n'utilise que 2 couleurs : en effet dès qu'un graphe possède au moins une arête, les extrémités de l'arête devant recevoir des couleurs différentes, on a besoin d'au moins deux couleurs pour une coloration propre de ses sommets.

Appliquons maintenant l'algorithme séquentiel au graphe du milieu de la FIG. 1.51 : on commence par colorier v_1 et v_2 : pour chacun la couleur 1 est disponible et elle leur est donc attribuée. Alors le sommet v_3 qui est adjacent à v_2 reçoit la couleur 2 et le sommet v_4 qui est adjacent à v_1 de couleur 1 et v_3 de couleur 2 sera colorié 3. La coloration obtenue (représentée sur la FIG. 1.52) n'est pas optimale puisque l'exemple précédent montre qu'il existe une coloration propre des sommets de ce même graphe en seulement deux couleurs.

Dans l'exemple de droite de la FIG. 1.51, les sommets v_1, v_2 et v_3 forment un stable, l'algorithme leur donne donc à chacun la couleur 1. Ensuite l'algorithme attribuera consécutivement la couleur 2 au sommet v_4 puisqu'il est adjacent à des sommets de couleur 1, la couleur 3 au sommet v_5 puisqu'il est adjacent à des sommets de couleur 1 et à un sommet de couleur 2, la couleur 4 au sommet v_6 puisqu'il est adjacent à des sommets de couleur 1 et à un sommet de couleur 2 et à un sommet de couleur 3. La coloration obtenue (représentée sur la FIG. 1.52) n'est pas optimale puisqu'il existe une coloration propre des sommets de ce même graphe en 3 couleurs (voir la FIG. 1.52). Puisque le graphe contient trois sommets mutuellement adjacents, toute coloration propre de ses sommets nécessite au moins 3 couleurs, et cette dernière coloration est optimale. □

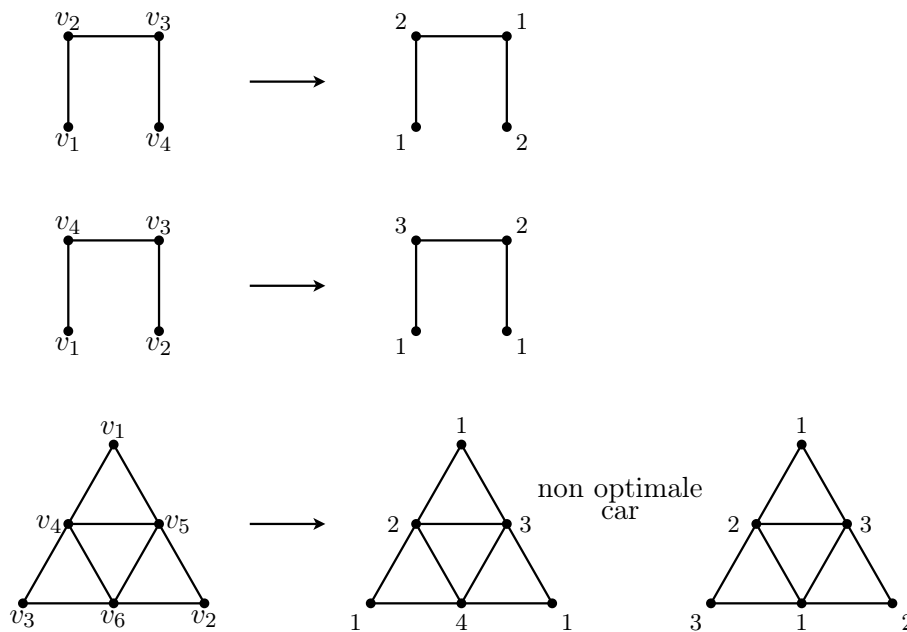


FIGURE 1.52 – Les colorations des graphes munis d'un ordre sur les sommets de l'Exercice 58 obtenues par l'algorithme séquentiel.

Remarque 18 Par définition, la coloration obtenue à la fin d'une exécution de l'Algorithme Séquentiel de Coloration des Sommets (FIG. 1.50) est une coloration propre des sommets du graphe donné. L'Exercice 58 montre que la coloration obtenue peut différer selon l'ordre des sommets.

Exercice 59 Soit G un graphe à n sommets v_1, v_2, \dots, v_n . On note G_i le sous-graphe de G induit par les sommets v_1, v_2, \dots, v_i ($1 \leq i \leq n$). Montrer que l'Algorithme Séquentiel de Coloration des Sommets (FIG. 1.50) appliqué à G et v_1, v_2, \dots, v_n , produit une k -coloration propre c des sommets de G telle que :

- (a) $k \leq \max\{d_{G_i}(v_i) + 1 : 1 \leq i \leq n\}$.
- (b) $k \leq \Delta(G) + 1$.

Solution (a) Soit c la k -coloration propre des sommets de G produite par l'Algorithme Séquentiel de Coloration des Sommets. Si $k = 1$ alors $V(G)$ est un stable de G , $d_{G_i}(v_i) = 0$ pour tout i , et la propriété est bien vérifiée. On suppose donc $k \geq 2$. Soit v_i un sommet tel que $c(v_i) = k$. Au moment où v_i a été colorié par l'algorithme il avait, par le principe de l'algorithme, au moins un voisin colorié par chacune des couleurs $1, 2, \dots, k-1$. Or v_i n'a par définition qu'au plus $d_{G_i}(v_i)$ voisins déjà coloriés, on a donc $k \leq d_{G_i}(v_i) + 1 \leq \max\{d_{G_i}(v_i) + 1 : 1 \leq i \leq n\}$.

- (b) Par (a) : $k \leq \max\{d_{G_i}(v_i) + 1 : 1 \leq i \leq n\} \leq \max\{d_G(v_i) + 1 : 1 \leq i \leq n\} = \Delta(G) + 1$. □

Exercice 60 Soient G un graphe connexe à n sommets, Δ le degré maximum d'un sommet dans G et v un sommet de G .

- (a) Montrer qu'il existe un ordre v_1, v_2, \dots, v_n des sommets de G qui vérifie les propriétés suivantes : $v_n = v$, et pour chaque $i < n$ le sommet v_i a dans G au moins un voisin v_j tel que $j > i$.
- (b) Soit c la k -coloration propre des sommets de G obtenue par l'exécution de l'Algorithme Séquentiel de Coloration des Sommets avec en entrée G et l'ordre v_1, v_2, \dots, v_n décrit en (a). Montrer que si $k > \Delta$ alors $k = \Delta + 1$, $c(w) \leq \Delta$ pour tout $w \in V \setminus \{v\}$, $d_G(v) = \Delta$ et les voisins de v sont tous coloriés différemment par c .
- (c) Montrer que si G possède un sommet de degré plus petit que Δ alors $\chi(G) \leq \Delta$.

Solution (a) Pour obtenir un ordre ayant les propriétés requises on peut utiliser l'Algorithme de Marquage de la Figure 1.21 avec en entrée G et v . On prend ensuite l'ordre inverse de l'ordre dans lequel les sommets sont marqués dans cet algorithme, c'est-à-dire que le i ème sommet marqué est défini comme v_{n-i+1} . Puisque G est connexe, par l'Exercice 22 à la fin de l'Algorithme de Marquage tous les sommets sont marqués, $v_n = v$ puisque v est le premier sommet marqué, et pour tout $i < n$ le sommet v_i a été marqué à partir d'un sommet v_j déjà marqué, ce qui signifie que $j > i$ et que v_j est un voisin de v_i . L'ordre v_1, v_2, \dots, v_n a bien les propriétés voulues.

(b) Soit v_1, v_2, \dots, v_n l'ordre décrit dans la partie (a) de l'Exercice. Pour $i = 1, 2, \dots, n-1$ on note G_i le sous-graphe de G induit par les sommets v_1, v_2, \dots, v_i . Pour chaque $i < n$, le sommet v_i a dans G au moins un voisin v_j tel que $j > i$, on a donc $d_{G_i}(v_i) \leq \Delta - 1$. Soit c la k -coloration propre des sommets de G obtenue par l'exécution de l'Algorithme Séquentiel de Coloration des Sommets avec en entrée G et l'ordre $v_1, v_2, \dots, v_n (= v)$. Sur les $n-1$ premiers sommets la coloration obtenue est la même que celle obtenue par l'exécution de l'Algorithme Séquentiel de Coloration des Sommets avec en entrée $G - v$ et l'ordre v_1, v_2, \dots, v_{n-1} . Par l'Exercice 59(a), c utilise au plus Δ couleurs pour ces $n-1$ sommets. Donc par le principe de l'algorithme, si $k > \Delta$ c'est parce que exactement Δ couleurs différentes sont utilisées par c pour les voisins de v . Puisque v a par hypothèse au plus Δ voisins on a bien qu'il en a exactement Δ , tous coloriés différemment.

(c) Si G possède un sommet v tel $d_G(v) < \Delta$, alors il n'existe pas de coloration de $G - v$ pour laquelle v aurait Δ voisins de couleurs différentes, donc par (b), il existe une coloration de G qui utilise au plus Δ couleurs. □

TRANSFORMATION D'UNE COLORATION EN RÉSULTAT D'UNE COLORATION SÉQUENTIELLE :

ENTRÉE : Une coloration propre c des sommets d'un graphe non orienté G par des entiers positifs.

SORTIE : Une coloration propre c' des sommets de G telle que chaque sommet v a au moins un voisin de chacune des couleurs $1, 2, \dots, c'(v) - 1$.

Étape 0 : *Initialisation.*
 $c'(v) := c(v)$ pour tout sommet v de G .

Étape 1 : *Transformation de la coloration.*
 Tant qu'il existe un sommet v pour lequel la propriété voulue n'est pas vérifiée
 poser $c'(v) := \min\{i < c'(v) : i \text{ n'est pas attribuée par } c' \text{ à un voisin de } v\}$.

FIGURE 1.53 – Transformation d'une coloration en résultat d'une exécution de l'Algorithme Séquentiel de Coloration des Sommets.

Exercice 61 Soit G un graphe.

- (a) Existe-t-il pour toute coloration optimale c des sommets de G , un ordre des sommets de G tel que l'Algorithme Séquentiel de Coloration des Sommets (FIG. 1.50) basé sur cet ordre donne c en sortie ?
- (b) Existe-t-il un ordre des sommets de G tel que l'Algorithme Séquentiel de Coloration des Sommets (FIG. 1.50) basé sur cet ordre donne une coloration optimale des sommets de G ?

Solution (a) La réponse est "non". Par exemple si G est le graphe constitué de trois sommets et d'une seule arête, la coloration qui attribue les couleurs 1 et 2 aux extrémités de l'arête et la couleur 2 au sommet isolé est optimale mais elle ne peut être obtenue par l'Algorithme Séquentiel de Coloration des Sommets puisque celui-ci attribuerait la couleur 1 au sommet isolé.

(b) La réponse est "oui". Considérons en effet une coloration propre c des sommets d'un graphe G avec les couleurs $1, 2, \dots, \chi(G)$. L'Algorithme Transformation d'une coloration en résultat d'une coloration séquentielle, décrit à la Figure 1.53, donne le moyen de construire à partir de c une coloration propre c' des sommets de G telle que chaque sommet v a des voisins de couleurs $1, 2, \dots, c'(v) - 1$. En effet, par définition de l'algorithme, à chaque instant c' est une coloration propre des sommets de G et à chaque itération de l'Étape 1 on modifie la couleur de v pour une couleur strictement plus petite. La somme des couleurs des sommets de G dans une coloration propre des sommets par des entiers positifs étant bornée inférieurement par le nombre de sommets de G , l'algorithme s'arrête toujours. Comme l'algorithme ne rajoute pas de couleur, la coloration c' obtenue a au plus autant de couleurs que c , et comme c utilisait un minimum de couleurs, c' n'en utilise pas moins, c'est donc aussi une coloration optimale des sommets de G . Si l'on ordonne les sommets de G de telle sorte que les premiers soient tous ceux coloriés 1 par c' , ensuite tous ceux coloriés 2 par c' , etc. . . , l'Algorithme Séquentiel de Coloration des Sommets basé sur cet ordre donnera exactement c' . \square

Un graphe $G = (V, E)$ est **biparti** s'il existe une partition de V en deux sous-ensembles A et B (aussi dite bipartition de V) telle que chacune des arêtes de G relie un sommet de A à un sommet de B ; autrement dit les deux sous-graphes $G[A]$ et $G[B]$ ne contiennent aucune arête. On utilisera la notation suivante : $\mathbf{G} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{E})$. Trois exemples de graphes bipartis sont représentés sur la FIG. 1.54. D'autres exemples se trouvent FIG. 1.35 et FIG. 1.41.

Remarque 19 Par l'Exercice 53, un graphe biparti pourrait être défini de manière équivalente comme un graphe 2-coloriable.

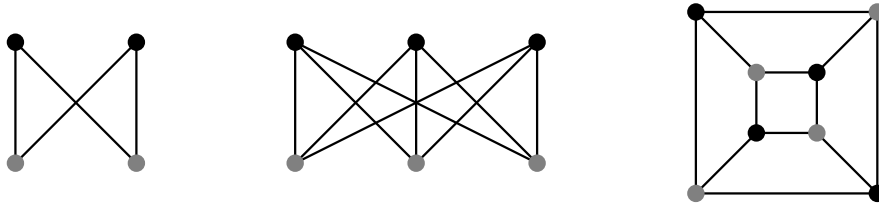


FIGURE 1.54 – Trois graphes bipartis. Pour chacun des graphes, les couleurs des sommets (noir ou gris) représentent la bipartition de l'ensemble des sommets.

Un cycle de longueur impaire (respectivement paire) est dit **cycle impair** (respectivement **cycle pair**).

Exercice 62 *Montrer qu'un graphe G est biparti si et seulement si G ne contient pas de cycle impair.*

Solution Nous proposons deux démonstrations.

Démonstration 1. Nous montrons tout d'abord que la condition est nécessaire. Supposons donc que G soit un graphe biparti $(A, B; E)$. On veut montrer que tous les cycles de G sont pairs. Soit donc $C = v_1 v_2 \dots v_k v_1$ un cycle de G . Puisqu'ils sont reliés par une arête, deux sommets consécutifs de C appartiennent l'un à A et l'autre à B . Sans perte de généralité on peut supposer que $v_1 \in A$, et alors, pour chaque entier positif $i \leq k$, $v_i \in A$ si i est impair et $v_i \in B$ sinon. Puisque $v_k v_1$ est une arête du cycle et $v_1 \in A$, v_k est donc dans B . On en conclut que k est pair et alors C est un cycle pair.

Pour vérifier que la condition est suffisante, supposons qu'il n'existe pas de cycle impair dans G . Sans perte de généralité on peut supposer que G est connexe, car la propriété d'être biparti, comme celle d'être sans cycle impair, est vérifiée si et seulement si chacune des composantes connexes du graphe vérifie la propriété.

On peut utiliser l'Algorithme de Marquage non orienté de la FIG. 1.21 pour déterminer une bipartition des sommets de G : le premier sommet, nommé s , est marqué A et chaque fois qu'on marque un nouveau sommet à partir d'un sommet de A (respectivement B) on le marque B (respectivement A). Lorsqu'on s'arrête c'est qu'on ne peut plus marquer de nouveau sommet et par l'Exercice 22, on a marqué tous les sommets de la composante connexe qui contient s , c'est-à-dire tous les sommets de G (puisque nous avons supposé G connexe).

Cas 1. S'il n'existe pas d'arête reliant deux sommets ayant la même marque alors G est bien un graphe biparti (de bipartition $\{A, B\}$).

Cas 2. Cette partie de la démonstration est illustrée sur la FIG. 1.55 où les sommets blancs (respectivement noirs) sont les sommets marqués A (respectivement B).

Supposons donc qu'il existe deux sommets u et v adjacents dans G qui ont la même marque. Puisque chaque sommet n'est marqué qu'une seule fois, il existe une chaîne élémentaire unique P_u de $u = u_0$ à $s = u_k$ ($k \geq 0$) telle que pour chacune de ses arêtes $u_i u_{i+1}$, le sommet u_i a été marqué à partir du sommet u_{i+1} (voir la preuve de l'Exercice 22). Remarquons que les extrémités de chaque arête de P_u sont marquées l'une A et l'autre B .

De même, il existe une chaîne élémentaire P_v de $v = v_0$ à $s = v_\ell$ telle que pour chacune de ses arêtes $v_j v_{j+1}$, le sommet v_j a été marqué à partir du sommet v_{j+1} ; les extrémités de chaque arête de P_v sont donc marquées l'une A et l'autre B .

Puisqu'il existe au moins un sommet commun à P_u et P_v (le sommet s) on peut définir $i^* \leq k$ le plus petit entier tel que u_{i^*} appartient à P_v ; il existe donc j^* tel que $u_{i^*} = v_{j^*}$. Par définition de i^* , les sous-chaînes $P_u[u, u_{i^*}]$ et $P_v[v, v_{j^*}]$ n'ont pas d'autre sommet que $u_{i^*} = v_{j^*}$ en commun.

Par conséquent la concaténation de $P_u[u, u_{i^*}]$ et de $P_v[v, v_{j^*}]$ parcourue en sens inverse est une (u, v) -chaîne élémentaire Q . De plus, puisque les sommets de Q sont alternativement marqués A et B et que u et v ont la même marque, la longueur de Q est paire. Mais alors en rajoutant à Q l'arête uv on obtient un cycle élémentaire de G dont la longueur est impaire, ceci contredit notre hypothèse initiale.

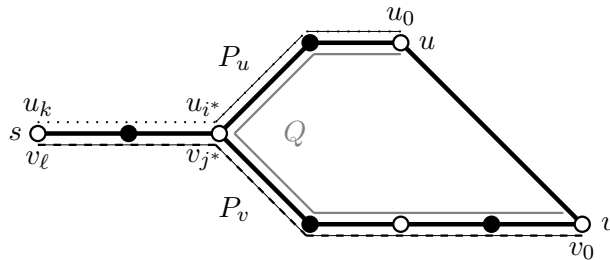


FIGURE 1.55 – Cas 2 de la démonstration 1 de l'Exercice 62.

Démonstration 2. Nous montrons d'abord que la condition est nécessaire. Supposons donc que G soit un graphe biparti $(A, B; E)$. Pour un cycle C de G , puisque chacune de ses arêtes a exactement une extrémité dans A , on a $E(C) = \delta_G(A) \cap E(C)$ et alors d'après l'Exercice 45, $E(C)$ est de cardinal pair.

Pour vérifier que la condition est suffisante, supposons qu'il n'existe pas de cycle impair dans G . Sans perte de généralité on peut supposer que G est connexe, car la propriété d'être biparti, comme celle d'être sans cycle impair, est vérifiée si et seulement si chacune des composantes connexes du graphe vérifie la propriété. A partir de G , on contracte consécutivement des paires de sommets non-adjacents tant que cette opération ne crée pas de cycle impair, on note G' le graphe ainsi obtenu. On remarque que ces contractions ne suppriment aucune arête. On considère les cas suivants :

Cas 1. G' a un seul sommet : alors G n'a aucune arête et il est donc biparti.

Cas 2. G' a deux sommets a et b : alors toutes les arêtes de G sont des arêtes entre a et b dans G' . La bipartition $\{A, B\}$ telle que A (respectivement B) soit l'ensemble des sommets qui ont été contractés dans a (respectivement b) vérifie que toutes les arêtes de G sont entre A et B , ce qui montre que G est biparti.

Cas 3. G' a au moins trois sommets. Puisque contracter une paire de sommets ne peut pas déconnecter un graphe, G' est connexe. Par l'Exercice 29, il existe dans G' une chaîne élémentaire uvw . Puisque G' est sans cycle impair, les sommets u et w sont non-adjacents. Soit G'' le graphe obtenu à partir de G' en contractant la paire u, w . D'après notre hypothèse, G'' contient un cycle impair qui par l'Exercice 43, se partitionne en cycles élémentaires, dont l'un au moins est impair par un argument de parité. Soit donc C'' un cycle élémentaire impair de G'' . On note C' le sous-graphe partiel de G' induit par les arêtes de C'' . Si C' est un cycle élémentaire dans G' alors on pose $C := C'$ sinon on pose $C := C' + uv + vw$. Dans les deux cas C est un cycle élémentaire impair de G' . Ceci contredit la définition de G' , ce cas est donc impossible. \square

Exercice 63 (Justification de l'algorithme de reconnaissance des graphes bipartis (FIG. 1.56)) Montrer que l'algorithme de reconnaissance des graphes bipartis, appliqué au graphe

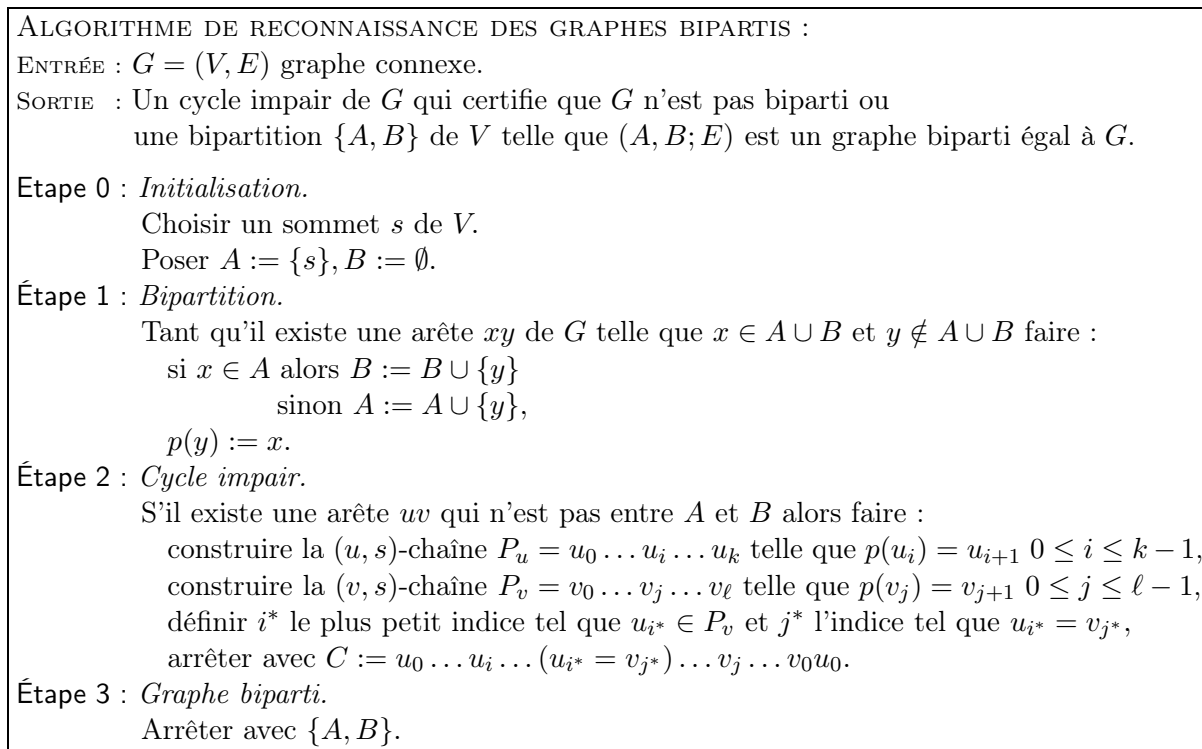


FIGURE 1.56 – Algorithme de reconnaissance des graphes bipartis.

G , se termine soit avec un cycle impair de G qui certifie que G n'est pas biparti, soit avec une bipartition $\{A, B\}$ de V telle que $(A, B; E)$ est un graphe biparti égal à G .

Solution Pour montrer que l'algorithme de reconnaissance des graphes bipartis se termine on considère chacune des étapes. L'Étape 1 s'arrête pour la même raison que l'algorithme de marquage, voir la solution de l'Exercice 22(a). Puisque G est connexe, par l'Exercice 22(b), à la fin de l'Étape 1 tous les sommets de G sont placés dans A ou B . L'Étape 2 consiste à vérifier pour chaque arête de G que ses extrémités sont l'une dans A et l'autre dans B . S'il existe une arête uv qui ne vérifie pas cette condition alors l'Étape 2 s'arrête avec C qui, par la première démonstration de l'Exercice 62, est bien un cycle impair. Sinon, l'Étape 3 s'arrête et le graphe G est bien égal au graphe biparti $(A, B; E)$. \square

Exercice 64 Décider pour chacun des graphes de la FIG. 1.57 s'il est biparti ou non. Donner un certificat pour chaque réponse.

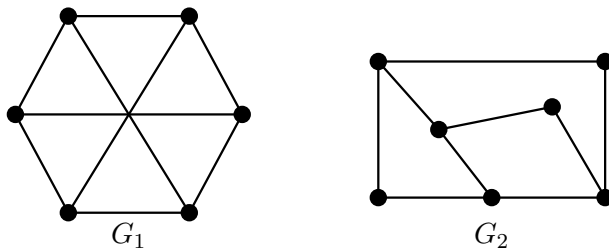


FIGURE 1.57 – Graphes de l'Exercice 64.

Solution Le graphe G_1 est biparti : par la Remarque 19 et la 2-coloration propre de G_1 indiquée sur la FIG. 1.58. Le graphe G_2 n'est pas biparti : par l'Exercice 62 et le cycle impair de G_2 marqué en gris sur la FIG. 1.58 (on remarque qu'il existe d'autres cycles impairs dans G_2).

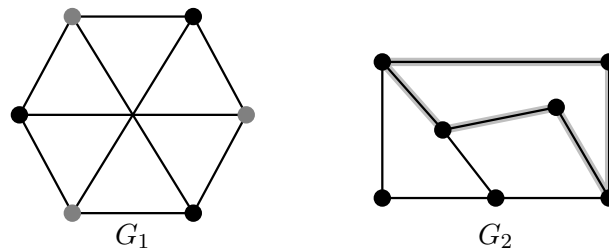


FIGURE 1.58 – Les certificats requis par l'Exercice 64.

□

Exercice 65 Soient G un graphe quelconque et G' le graphe obtenu à partir de G de la manière suivante : pour chaque arête e de G on ajoute un nouveau sommet w_e adjacent aux extrémités de e et on supprime e . (Un exemple de cette construction est représenté FIG. 1.59.) Montrer que le graphe G' est biparti.

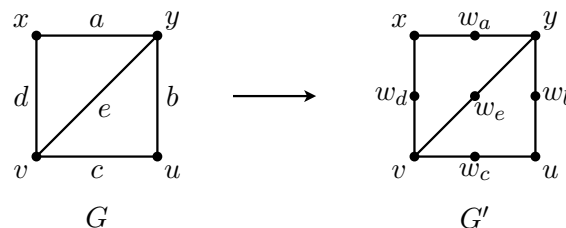


FIGURE 1.59 – Un exemple de la construction de l'Exercice 65.

Solution On pose $G = (V, E)$. Par définition, l'ensemble des sommets de G' est divisé en deux parties : V et $W := \{w_e : e \in E\}$. De plus, les arêtes de G' sont entre V et W : on a supprimé toutes les arêtes entre les sommets de V et on n'a ajouté aucune arête entre les sommets de W . Par conséquent, G' est biparti.

Une autre solution consiste à remarquer que chaque cycle C' de G' correspond à un cycle C de G tel que $|E(C')| = 2|E(C)|$. Tous les cycles de G' sont donc pairs et ainsi par l'Exercice 62, G' est biparti.

□

Exercice 66 Soit G un graphe.

- (a) Montrer que si G est un cycle élémentaire de longueur impaire alors $\chi(G) = \Delta(G) + 1$.
- (b) Montrer que si G est un graphe complet alors $\chi(G) = \Delta(G) + 1$.

Solution (a) Si G est un cycle élémentaire de longueur impaire, alors par l'Exercice 62 on a $\chi(G) > 2$. Dans un cycle élémentaire, tous les sommets sont de degré 2, on sait donc par l'Exercice 60 (b) que $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1 = 3$. On en conclut que $\chi(G) = 3 = 2 + 1 = \Delta(G) + 1$.

(b) Si G est un graphe complet alors tous ses sommets doivent être coloriés différemment et $\Delta(G) = |V| - 1$, donc $\chi(G) = |V| = \Delta(G) + 1$.

Exercice 67 (Théorème de Brooks) Soient G un graphe simple connexe qui n'est ni un cycle élémentaire de longueur impaire ni un graphe complet et $\Delta = \Delta(G)$ le degré maximum d'un sommet dans G . Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une coloration propre des sommets de G en au plus Δ couleurs.

- (a) Montrer que si $\Delta \leq 2$ alors $\chi(G) \leq \Delta$.
- (b) Montrer que si G possède un sommet w tel que $G - w$ n'est pas connexe alors $\chi(G) \leq \Delta$.
- (c) Montrer que si G possède deux sommets w et w' tels que $G - \{w, w'\}$ n'est pas connexe alors $\chi(G) \leq \Delta$.
- (d) Soit v un sommet de G de degré Δ . Montrer que v possède dans G deux voisins a et b non adjacents et que si $G - \{a, b\}$ est connexe alors il existe un ordre sur les sommets de G tel que l'Algorithme Séquentiel de Coloration des Sommets basé sur cet ordre produise une Δ -coloration propre des sommets de G .
- (e) Montrer que $\chi(G) \leq \Delta$,
- (f) Montrer que si G est un graphe connexe qui possède au moins une arête multiple alors $\chi(G) \leq \Delta$.

Solution

(a) Supposons par l'absurde que $\Delta \leq 2$ et $\chi(G) > \Delta$. Alors par l'Exercice 60(c), G est Δ -régulier. Si $\Delta = 0$ ou 1 alors, puisqu'il est supposé connexe, G ne peut être qu'un graphe complet, une contradiction à nos hypothèses sur G . Si $\Delta = 2$, alors puisqu'il est connexe et pas un cycle élémentaire de longueur impaire, G est un cycle élémentaire de longueur paire et par l'Exercice 62, $\chi(G) = 2 = \Delta$, ceci contredit notre hypothèse.

(b) Supposons que G possède un sommet w tel que $G - w$ n'est pas connexe.

Soient V_1, V_2, \dots, V_k les ensembles de sommets des composantes connexes de $G - w$ et G_1, G_2, \dots, G_k les sous-graphes de G induits par respectivement $V_1 \cup \{w\}, V_2 \cup \{w\}, \dots, V_k \cup \{w\}$.

Par l'Exercice 28, puisque G est connexe, $d_G(V_i) > 0$ et puisque $G - w$ n'est pas connexe on a $k \geq 2$ et pour tout $i = 1, 2, \dots, k$, $d_{G-w}(V_i) = 0$. Par conséquent w a au moins un voisin dans chaque V_i et donc par la Remarque 12 chaque G_i est connexe. Pour tout $1 \leq i \leq k$, on a $d_{G_i}(v) \leq d_G(v) \leq \Delta$ quel que soit $v \in V_i$, et $d_{G_i}(w) < d_G(w) \leq \Delta$. Chaque G_i est donc de degré maximum au plus Δ et contient un sommet de degré plus petit que Δ .

Par l'Exercice 60(c) appliqué à G_i et w , et par la Remarque 16, on sait alors que chacun des G_i possède une coloration propre c_i de ses sommets en Δ couleurs $1, 2, \dots, \Delta$. Par l'Exercice 55 on peut supposer que w a la même couleur, disons 1, dans chaque coloration c_i . On peut alors définir une Δ -coloration propre c des sommets de G comme suit : $c(w) = 1$ et pour tout sommet v de G distinct de w on pose $c(v) = c_i(v)$ pour l'unique i tel que $v \in V_i$. Par hypothèse toute arête de G est interne à un G_i , donc c est une Δ -coloration propre des sommets de G et ainsi $\chi(G) \leq \Delta$.

(c) Supposons que G possède deux sommets w et w' tels que $G - \{w, w'\}$ n'est pas connexe. On peut aussi supposer que $\Delta > 2$, car sinon la conclusion suit immédiatement de (a).

Soient V_1, V_2, \dots, V_k les ensembles de sommets des composantes connexes de $G - \{w, w'\}$ et G_1, G_2, \dots, G_k les sous-graphes de G induits par respectivement $V_1 \cup \{w, w'\}, V_2 \cup \{w, w'\}, \dots, V_k \cup \{w, w'\}$.

Pour tout sommet x de V_i , on a $d_{G_i}(x) \leq d_G(x) \leq \Delta$.

Puisque $G - \{w, w'\}$ n'est pas connexe on a $k \geq 2$. S'il existait $1 \leq i \leq k$ tel que w n'est adjacent à aucun sommet de V_i alors en enlevant w' à G on disconnecterait V_i du reste des sommets du graphe, et alors par (b) on aurait bien $\chi(G) \leq \Delta$. On suppose donc que w est adjacent à au moins un sommet de chacun des V_i et par symétrie on peut faire de même pour w' . Par conséquent, $d_{G_i}(w) < d_G(w) \leq \Delta$ et $d_{G_i}(w') < d_G(w') \leq \Delta$ pour tout $1 \leq i \leq k$, et par l'Exercice 28 chacun des G_i est connexe.

Par l'Exercice 60(c) et par la Remarque 16, on sait alors que, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, G_i possède une coloration propre c_i de ses sommets en Δ couleurs $1, 2, \dots, \Delta$.

Si pour chacune de ces colorations $c_i(w) = c_i(w')$ on peut par l'Exercice 55 supposer que w

et w' ont la même couleur, disons 1, dans chaque c_i et obtenir une Δ -coloration propre c des sommets de G tout entier en posant pour tout sommet $v : c(v) = c_i(v)$ si $v \in V(G_i)$.

De même si pour chacune des colorations c_i on a $c_i(w) \neq c_i(w')$ on peut supposer par l'Exercice 55 que $c_i(w) = 1$ et $c_i(w') = 2$ pour tout $1 \leq i \leq k$ et obtenir une Δ -coloration propre c des sommets de G tout entier en posant pour tout sommet $v : c(v) = c_i(v)$ si $v \in V(G_i)$.

Il reste à considérer le cas où au moins un G_i , sans perte de généralité on peut supposer que c'est G_1 , est tel que pour toute Δ -coloration propre des sommets, w et w' reçoivent la même couleur, tandis que pour un autre, sans perte de généralité on peut supposer que c'est G_2 , pour toute Δ -coloration propre des sommets, w et w' reçoivent des couleurs différentes. Pour que w et w' puissent recevoir la même couleur dans une coloration propre de G_1 il faut qu'ils soient non adjacents dans G_1 , et ils sont donc non adjacents dans G_2 également. Pour que, de plus, w et w' ne puissent pas être coloriés différemment dans une coloration propre de G_1 , il faut que dans G_1 chacune des $\Delta - 1$ couleurs autres que $c_1(w) = c_1(w')$ apparaissent dans le voisinage de w , par conséquent $d_{G_1}(w) \geq \Delta - 1$ et donc w a au plus un voisin x dans G_2 . Exactement le même raisonnement s'applique à w' , et ainsi w' a un seul voisin x' dans G_2 . Puisque $\Delta > 2$, il existe une couleur j parmi $1, 2, \dots, \Delta$ qui n'est égale ni à $c_2(x)$ ni à $c_2(x')$. Mais alors la coloration c'_2 obtenue en modifiant c_2 uniquement pour w et w' qui deviennent coloriés tous deux avec j , serait une coloration propre de G_2 qui contredirait notre hypothèse sur G_2 . Ce cas n'est donc pas possible et on a bien $\chi(G) \leq \Delta$.

(d) Si un sommet de degré Δ a tous ses voisins mutuellement adjacents, alors, puisque G est un graphe simple, il forme avec eux une clique K de taille $\Delta + 1$ dont tous les sommets sont de degré Δ . Puisque par hypothèse, G n'est pas une clique, il doit contenir un sommet v qui n'appartient pas à K et alors, puisque G est supposé connexe, par l'Exercice 28 $d_G(K) \geq 1$ et au moins un sommet de K serait de degré supérieur à Δ dans G , une contradiction à la définition de Δ .

Par conséquent v possède dans G deux voisins a et b non adjacents. Si $G - \{a, b\}$ est connexe, par l'Exercice 60, il existe un ordre $v_1, v_2, \dots, v_{n-2} = v$ des sommets de $G - \{a, b\}$ tel que pour chaque $i < n - 2$, le sommet v_i a dans G au moins un voisin d'indice plus grand que i . Mais alors l'ordre $a, b, v_1, v_2, \dots, v_{n-2}$ des sommets de G place a et b tout au début de l'ordre précédent a aussi la propriété que chaque sommet autre que le dernier a un voisin situé plus loin dans l'ordre. Par l'Exercice 59 une exécution de l'Algorithme Séquentiel de Coloration des Sommets avec G et cet ordre en entrée donnera une $(\Delta + 1)$ -coloration propre c des sommets de G . Par définition de l'algorithme on aura $c(a) = c(b)$ (puisque b n'est pas adjacent à a). Or a et b sont des voisins de v , par l'Exercice 60(b) c est une Δ -coloration propre des sommets de G .

(e) Par (c) si G possède deux sommets w et w' tels que $G - \{w, w'\}$ n'est pas connexe alors $\chi(G) \leq \Delta$ et sinon par (d) il existe une Δ -coloration propre des sommets de G , et donc dans tous les cas on a $\chi(G) \leq \Delta$.

(f) Soit G un graphe connexe qui possède au moins une arête multiple, et soit G' obtenu à partir de G en remplaçant chaque arête de multiplicité plus grande que 1 par une arête de multiplicité 1. En faisant cela on ne peut pas augmenter le degré des sommets, et par conséquent le degré maximum Δ' de G' est inférieur ou égal à Δ . De plus, G' reste connexe. Puisque deux sommets adjacents doivent être de couleurs différentes quelle que soit la multiplicité de l'arête qui les relie, on a $\chi(G) = \chi(G')$. Donc, par (e), si G' n'est ni un cycle impair ni une clique on obtient bien $\chi(G) = \chi(G') \leq \Delta' \leq \Delta$. Sinon, G' est un cycle impair ou bien une clique et donc tous ses sommets sont de degré maximum Δ' : en conséquence on a $\Delta \geq \Delta' + 1$. Or par l'Exercice 66 on a $\chi(G') = \Delta' + 1$ et donc $\chi(G) = \chi(G') = \Delta' + 1 \leq \Delta$. \square

Un sommet d'un graphe G est dit **sommet simplicial** de G si l'ensemble de ses voisins est

une clique de G . Un ordre v_1, v_2, \dots, v_n des sommets d'un graphe G est dit **simplicial** si v_i est un sommet simplicial du sous-graphe de G induit par les sommets v_1, v_2, \dots, v_i pour tout i entre 1 et n .

Remarque 20 Si v_1, v_2, \dots, v_n est un ordre simplicial des sommets de G alors l'Algorithme Séquentiel de Coloration des Sommets appliqué à G muni de cet ordre fournit une coloration optimale de G . En effet, chaque fois qu'on colorie un sommet son voisinage est une clique. Donc si k est la plus grande couleur utilisée par la coloration c'est que le graphe contient une clique de taille k . Par l'Exercice 54, la coloration est alors optimale.

Exercice 68 Montrer qu'un graphe G possède un ordre simplicial des sommets si et seulement si tout sous-graphe de G possède un sommet simplicial.

Solution On montre tout d'abord que la condition est nécessaire. Pour cela on suppose que v_1, v_2, \dots, v_n est un ordre simplicial des sommets de G , et on considère un sous-graphe G' de G . Soit k le plus grand indice d'un sommet de G' . Puisque l'ordre est simplicial, le sommet v_k est simplicial dans le sous-graphe de G noté G_k induit par les sommets v_1, v_2, \dots, v_k . Or, par la définition de k , tous les voisins de v_k qui sont dans G' sont aussi des voisins de v_k dans G_k , ils forment donc une clique dans G' et v_k est un sommet simplicial de G' . On a ainsi montré que tout sous-graphe de G possède un sommet simplicial.

Supposons maintenant que tout sous-graphe de G possède un sommet simplicial. On montre par récurrence sur le nombre de sommets de G qu'il existe alors un ordre simplicial des sommets. Si G n'a qu'un sommet alors son unique sommet est simplicial dans l'unique sous-graphe de G qui est G lui-même. On suppose maintenant qu'on a montré la propriété pour les graphes à n sommets ($n \geq 1$), et on considère un graphe G à $n + 1$ sommets dont tout sous-graphe possède un sommet simplicial. Puisque G est un sous-graphe de lui-même, il possède donc un sommet simplicial v . De plus un sous-graphe de $G - v$ est un sous-graphe de G et ainsi tout sous-graphe de $G - v$ possède un sommet simplicial. Par l'hypothèse de récurrence, $G - v$ possède un ordre simplicial v_1, v_2, \dots, v_n . En rajoutant v tout à la fin de cet ordre, c'est-à-dire en posant $v_{n+1} := v$ on obtient un ordre simplicial de G . \square

Un graphe dont tout cycle élémentaire de longueur supérieure ou égale à 4 possède au moins une corde est dit **triangulé**.

Un sous-ensemble S des sommets d'un graphe G est dit **(a, b) -séparateur de G** si a et b sont deux sommets de $G - S$ qui ne sont pas dans la même composante connexe de $G - S$, et il est dit **(a, b) -séparateur minimal de G** s'il est un (a, b) -séparateur de G et aucun de ses sous-ensembles propres n'en est un.

Remarque 21 Si S est un (a, b) -séparateur de G alors a et b sont des sommets non adjacents de G , et si a et b sont deux sommets non adjacents de G , l'ensemble des sommets de G distincts de a et de b est un (a, b) -séparateur. Tout (a, b) -séparateur d'un graphe G contient un (a, b) -séparateur minimal de G , il suffit de lui enlever des sommets jusqu'à obtenir un (a, b) -séparateur minimal de G .

Exercice 69 Soient G un graphe, S un (a, b) -séparateur minimal de G , A et B les composantes connexes de $G - S$ qui contiennent respectivement a et b . Montrer que chaque sommet de S est adjacent dans G à au moins un sommet de chacun des ensembles A et B .

Solution Puisque S est un (a, b) -séparateur de G , a et b appartiennent à des composantes connexes distinctes de $G - S$, et donc $A \neq B$. Soit x un sommet quelconque de S . Puisque S est minimal, a et b sont dans la même composante connexe de $G - (S \setminus \{x\})$, celle-ci contient donc A et B . En conséquence, par l'Exercice 28, $d_{G-S}(A) = 0$ et $d_{G-(S \setminus \{x\})}(A) > 0$. Or le seul sommet de $G - (S \setminus \{x\})$ qui n'est pas dans $G - S$ est le sommet x , on en conclut que x est adjacent à au moins un sommet de A . De même x est adjacent dans G à au moins un sommet de B . \square

Exercice 70 Soient G un graphe et G' un sous-graphe de G . Montrer que si S' est un (a, b) -séparateur minimal de G' alors il existe un (a, b) -séparateur minimal de G qui contient S' .

Solution Soit S' un (a, b) -séparateur minimal d'un sous-graphe G' de G . On note V l'ensemble des sommets de G et W' l'ensemble des sommets de $G' - S'$. On a $G - (V \setminus W') = G[W'] = G'[W'] = G' - S'$, par conséquent les composantes connexes de $G - (V \setminus W')$ sont les mêmes que celles de $G' - S'$ et $V \setminus W'$ est un (a, b) -séparateur de G . Par la Remarque 21 on peut supprimer des sommets de $V \setminus W'$ jusqu'à obtenir un (a, b) -séparateur minimal S de G . Puisque S' est minimal, par l'Exercice 69 tout sommet v de S' est adjacent à au moins un sommet de chacune des composantes connexes de $G'[W'] = G[W']$ qui contiennent a et b , par conséquent un sous-ensemble de $V \setminus W'$ qui ne contiendrait pas v ne serait pas un (a, b) -séparateur de G . On a donc bien $S' \subseteq S$. \square

Exercice 71 (Théorème de Dirac) Soit G un graphe. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.

- (a) G est triangulé,
- (b) un (a, b) -séparateur minimal de G est une clique de G , pour toute paire de sommets a, b non adjacents,
- (c) tout sous-graphe G' de G dont l'ensemble des sommets n'est pas une clique possède deux sommets simpliciaux non adjacents,
- (d) G possède un ordre simplicial des sommets.

Solution : (a) \Rightarrow (b) Soient G un graphe triangulé, a et b deux sommets de G non adjacents, S un (a, b) -séparateur minimal de G et A et B les composantes connexes de $G - S$ qui contiennent respectivement a et b . Supposons que S n'est pas une clique et donc qu'il existe deux sommets x et y de S qui ne sont pas adjacents dans G . Par l'Exercice 69 il existe a' et a'' dans A et b' et b'' dans B tels que xa' , ya'' , xb' et yb'' soient des arêtes de G .

Puisque A est une composante connexe de $G - S$, il existe dans $G[A]$ une chaîne C_A entre a' et a'' qui par concaténation avec les arêtes xa' et $a''y$ fournit une chaîne d'extrémités x et y et dont tous les sommets intermédiaires sont dans A . Par conséquent il existe une chaîne C_A^* avec les mêmes propriétés (d'extrémités x et y et dont tous les sommets intermédiaires sont dans A) qui a un nombre minimum d'arêtes. La chaîne C_A^* est donc sans corde et elle contient au moins un sommet de A puisque x et y sont supposés non adjacents. Par symétrie il existe aussi une chaîne sans corde C_B^* d'extrémités x et y et dont tous les sommets intermédiaires sont dans B . Puisque A et B sont des composantes connexes distinctes de $G - S$ il n'existe aucune arête entre un sommet de A et un sommet de B , et ainsi la concaténation de C_A^* et C_B^* est un cycle élémentaire sans corde de longueur supérieure ou égale à 4 (il contient x et y et au moins un sommet de chacun des ensembles A et B), ceci contredit notre hypothèse selon laquelle G est triangulé.

(b) \Rightarrow (c) Par l'Exercice 70, si un graphe satisfait (b) alors tous ses sous-graphes satisfont (b) également. Il suffit donc de montrer que tout graphe qui a la propriété (b) et dont l'ensemble des sommets n'est pas une clique possède deux sommets simpliciaux non adjacents, ce que nous

allons faire par induction sur le nombre de sommets. Il est facile de vérifier pour un graphe ayant au plus 3 sommets, que soit ceux-ci sont tous deux à deux adjacents, soit deux au moins sont des sommets simpliciaux non adjacents. On suppose maintenant que la propriété a été démontrée pour tout graphe ayant au plus n sommets et on considère un graphe G dont les $n + 1$ sommets ne sont pas une clique et qui a la propriété (b). Par la Remarque 21, il existe alors deux sommets non adjacents a et b de G et un (a, b) -séparateur minimal S de G . Par l'hypothèse selon laquelle G satisfait (b), S est une clique. On note A la composante connexe de $G - S$ qui contient a , B celle qui contient b , et G_A , respectivement G_B , les graphes $G[A \cup S]$ et $G[B \cup S]$. Par définition, A et B sont non vides et disjoints. Soit v un sommet de A . Par l'Exercice 28 et la définition de A les voisins de v dans G sont soit dans A soit dans S . Par conséquent, les voisins de v dans G_A sont les mêmes que dans G , et donc un sommet simplicial de G_A qui se trouverait dans A est aussi un sommet simplicial de G . On va montrer qu'il existe un tel sommet. Comme remarqué plus haut, par l'Exercice 70 on sait que G_A vérifie (b). Nous pouvons donc utiliser notre hypothèse de récurrence sur G_A puisqu'il a moins de sommets que G (B contient au moins le sommet b) et ainsi G_A vérifie (c). Si les sommets de G_A sont une clique alors tous ses sommets sont simpliciaux, donc en particulier ceux de A . Sinon, par la propriété (c), G_A possède deux sommets non adjacents et simpliciaux dans G_A , ils ne peuvent donc pas être tous les deux dans S qui est une clique, et alors l'un d'eux au moins est dans A . On a ainsi prouvé que A possède au moins un sommet simplicial de G , noté v_A . Par symétrie, B possède lui aussi un sommet simplicial de G , noté v_B . Puisque A et B sont des composantes connexes distinctes de $G - S$ les sommets v_A et v_B sont distincts et non adjacents et G vérifie bien la propriété (c).

(c) \Rightarrow (d) Soit G un graphe qui vérifie (c), on a alors que tout sous-graphe G' de G dont l'ensemble des sommets n'est pas une clique possède un sommet simplicial. De plus, par définition, dans un sous-graphe dont l'ensemble des sommets est une clique, tous les sommets sont des sommets simpliciaux. Par l'Exercice 68, il existe alors un ordre simplicial des sommets de G .

(d) \Rightarrow (a) Par l'Exercice 68, l'existence d'un ordre simplicial implique que chaque sous-graphe possède un sommet simplicial. Or un cycle élémentaire sans corde de longueur au moins 4 ne possède aucun sommet simplicial. En conséquence, si G admet un ordre simplicial alors il est triangulé. \square

Une **coloration des arêtes** d'un graphe G est une fonction \mathbf{c} de l'ensemble des arêtes de G dans un ensemble de couleurs \mathcal{C} . Si $|\mathcal{C}| = k$ on dit que c est une **k -coloration** et on supposera généralement que $\mathcal{C} = \{1, 2, \dots, k\}$.

Remarque 22 Par définition, une k -coloration des arêtes d'un graphe est aussi une k' -coloration des arêtes de ce graphe, pour tout $k' \geq k$.

Une coloration c des arêtes d'un graphe G est dite **propre** si les couleurs attribuées à chaque paire d'arêtes adjacentes sont différentes, c'est-à-dire $c(e) \neq c(f)$ pour toutes arêtes e et f ayant une extrémité commune.

On appelle **indice chromatique** du graphe G , noté $\chi'(G)$, le plus petit k tel qu'il existe une k -coloration propre des arêtes de G . Une $\chi'(G)$ -coloration propre des arêtes de G sera dite **optimale**. Un graphe sera dit **k -arête-coloriable** si son indice chromatique est inférieur ou égal à k .

Exercice 72 Calculer l'indice chromatique des graphes de la FIG. 1.60. Justifier la réponse.

Solution Les colorations d'arêtes représentées sur la FIG. 1.61 sont propres, elles donnent une borne supérieure des indices chromatiques des graphes considérés : $\chi'(G_1) \leq 2$, $\chi'(G_2) \leq 3$, $\chi'(G_3) \leq 3$ et $\chi'(G_4) \leq 7$.

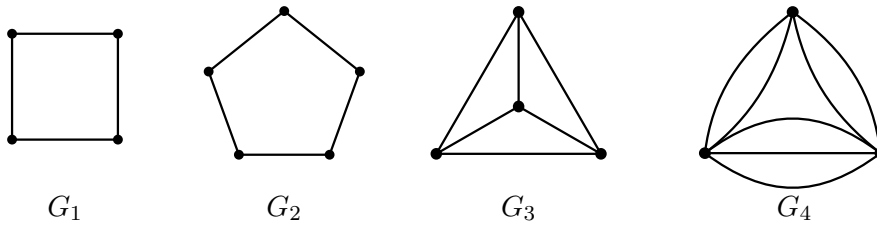


FIGURE 1.60 – Les graphes de l’Exercice 72

Le graphe G_1 possède des arêtes adjacentes, qui doivent recevoir des couleurs distinctes, et ainsi $\chi'(G_1) \geq 2$. Avec la borne supérieure on en déduit que $\chi'(G_1) = 2$.

On remarque que G_2 ne possède pas trois arêtes mutuellement non-adjacentes, donc dans toute coloration propre des arêtes de G_2 , l’ensemble des arêtes d’une même couleur est de cardinal au plus 2. Or G_2 possède 5 arêtes, toute coloration propre des arêtes devra donc utiliser au moins 3 couleurs. Avec la borne supérieure on en déduit que $\chi'(G_2) = 3$. Une autre méthode consiste à essayer de colorier proprement les arêtes de G_2 avec 2 couleurs seulement, jusqu’à trouver une arête qui est adjacente à deux arêtes déjà coloriées différemment, ce qui montre qu’on a besoin d’une troisième couleur.

Le graphe G_3 possède un triangle, donc trois arêtes mutuellement adjacentes et ainsi $\chi'(G_3) \geq 3$. Avec la borne supérieure on en déduit que $\chi'(G_3) = 3$.

Dans G_4 toutes les arêtes sont adjacentes entre elles. Une coloration propre des arêtes de G_4 utilise donc autant de couleurs que d’arêtes et ainsi $\chi'(G_4) = 7$. \square

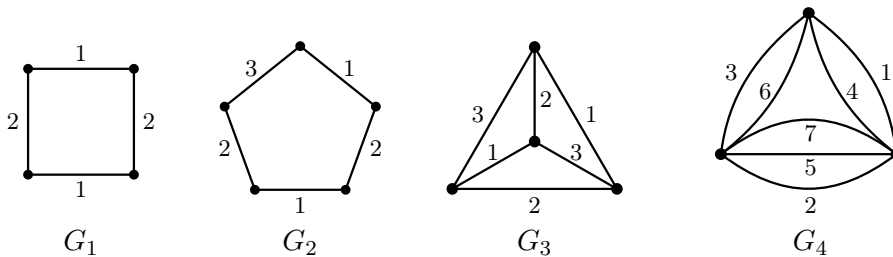


FIGURE 1.61 – Colorations des arêtes des graphes de la FIG. 1.60

On appelle **line-graphe** du graphe G , noté $L(G)$, le graphe dont l’ensemble des sommets est égal à l’ensemble des arêtes de G et dont deux sommets e et f sont reliés par une arête si et seulement si e et f sont des arêtes adjacentes dans G .

Remarque 23 Par définition, une k -coloration propre des arêtes d’un graphe G est une k -coloration propre des sommets de $L(G)$.

On appelle **couplage** d’un graphe G , un sous-ensemble d’arêtes de G deux à deux non adjacentes.

Exercice 73 Montrer qu’une k -coloration propre des arêtes d’un graphe $G = (V, E)$ est équivalente à une partition des arêtes de G en au plus k couplages.

Solution Soit c une k -coloration propre des arêtes de G avec les couleurs $1, 2, \dots, k$, et soit $M_i = c^{-1}(i)$ l’ensemble des arêtes de G auxquelles c attribue la couleur i . Puisque c est une coloration propre, on a que chaque M_i est un ensemble d’arêtes de G sans extrémités en commun, il s’agit donc d’un couplage de G et l’ensemble des M_i qui sont non vides est une partition de E .

Réciproquement, si $\mathcal{P} = \{M_1, \dots, M_l\}$, où $l \leq k$, est une partition de E telle que chaque M_i est un couplage de G , alors en attribuant à chaque arête e l'indice de l'ensemble de \mathcal{P} qui la contient on obtient une k -coloration propre des arêtes de G . \square

Exercice 74 Soit G un graphe et $\Delta = \Delta(G)$ le degré maximum d'un sommet dans G . Montrer que $\chi'(G) \geq \Delta$.

Solution Soit v un sommet de G de degré Δ : par définition, dans toute coloration propre des arêtes de G les arêtes incidentes à v ont chacune une couleur différente de celles des autres, une coloration propre des arêtes utilise alors au moins Δ couleurs rien que pour ces arêtes. \square

Étant données une k -coloration propre c des arêtes d'un graphe G et deux couleurs distinctes α et β utilisées par c , on note $G_{\alpha,\beta}^c$ le graphe partiel de G induit par l'ensemble des arêtes e de G telles que $c(e) = \alpha$ ou $c(e) = \beta$.

Pour une composante connexe C de $G_{\alpha,\beta}^c$, on appelle **coloration obtenue par l'échange des couleurs α et β dans C** la coloration c' définie de la manière suivante :

- pour toute arête e de C : si $c(e) = \alpha$ alors $c'(e) = \beta$ et sinon $c'(e) = \alpha$ (on échange les couleurs α et β des arêtes de C),
- pour toute arête e de G qui n'est pas dans C : $c'(e) = c(e)$.

La solution de l'Exercice 75 montre que c' est une coloration propre des arêtes de G .

Exercice 75 Soient G un graphe simple, c une k -coloration propre des arêtes de G , α et β deux couleurs distinctes utilisées par c .

- (a) Montrer que chaque composante connexe de $G_{\alpha,\beta}^c$ est, soit une chaîne élémentaire, soit un cycle élémentaire de longueur paire, dont les arêtes sont alternativement coloriées par α et β .
- (b) Soit C une composante connexe de $G_{\alpha,\beta}^c$ et c' la coloration obtenue par l'échange des couleurs α et β dans C . Montrer que c' est une k -coloration propre des arêtes de G .

Solution (a) Pour chaque sommet v , par définition d'une coloration propre des arêtes de G , au plus une arête incidente à v est coloriée α par c , et au plus une arête incidente à v est coloriée β par c . Par conséquent dans $G_{\alpha,\beta}^c$ les sommets sont de degré 0, 1 ou 2, c'est-à-dire que chaque composante connexe est, ou bien un sommet isolé, ou bien une chaîne élémentaire, ou bien un cycle élémentaire. De plus la restriction de c à $G_{\alpha,\beta}^c$ est une 2-coloration des arêtes de $G_{\alpha,\beta}^c$. Donc si C est un cycle, alors les couleurs α et β alternent tout au long de ce cycle et celui-ci est donc de longueur paire.

(b) Dans la coloration c' obtenue par l'échange des couleurs α et β dans C les couleurs utilisées pour les arêtes incidentes à un sommet v sont les mêmes que pour c lorsque v est incident à 0 ou deux arêtes de C , et si v est incident à exactement une arête coloriée α ou β le seul changement est que celle-ci est coloriée de l'autre couleur par c' . Puisque c était une k -coloration propre des arêtes de G , c' en est une aussi. \square

Remarque 24 Si G est un graphe simple alors une arête est caractérisée par ses extrémités et l'on peut sans ambiguïté écrire $c(xy)$ au lieu de $c(e)$ pour une arête e d'extrémités x et y .

Étant donnée une k -coloration propre c des arêtes de G et un sommet v de G , on dénote par $A_c(v)$ l'ensemble des couleurs absentes en v , c'est-à-dire l'ensemble des $k - d(v)$ couleurs qui ne sont pas utilisées par c pour les arêtes incidentes à v .

Exercice 76 (Théorème de Vizing) Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Le but de l'exercice est de montrer que $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$. Pour cela on raisonne par récurrence sur le nombre d'arêtes de G .

(a) Montrer que si G n'a aucune arête alors $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Pour les questions (b), (c), (d), (e) et (f), on suppose que xy est une arête de G et qu'il existe une $(\Delta(G) + 1)$ -coloration propre c des arêtes de $G - xy$ avec les couleurs $1, 2, \dots, \Delta(G) + 1$.

(b) Montrer que $A_c(v) \neq \emptyset$ pour tout $v \in V$.

(c) Montrer que si $A_c(x) \cap A_c(y) \neq \emptyset$ alors $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

(d) Montrer que si $\chi'(G) > \Delta(G) + 1$ alors pour tout $\alpha \in A_c(x)$ et tout $\beta \in A_c(y)$, il existe dans $G - xy$ une chaîne élémentaire d'extrémités x et y dont les arêtes sont coloriées alternativement α et β par c .

(e) Montrer que si $\chi'(G) > \Delta(G) + 1$ alors il existe une suite y_0, y_1, \dots, y_k de $k+1$ voisins de x mutuellement distincts ($k \geq 1$) telle que $y_0 = x$, $c(xy_i) \in A_c(y_{i-1})$ pour tout $1 \leq i \leq k$, et, pour tout voisin z de x distinct de y_1, \dots, y_{k-1} , $c(xz) \notin A_c(y_k)$.

Étant donnée une suite y_0, \dots, y_k ayant les propriétés décrites en (e), pour $0 \leq r \leq k$, on définit une coloration c_r des arêtes de $G - xy_r$ de la manière suivante : $c_r(xy_i) = c(xy_{i+1})$ pour tout i de 0 à $r-1$ et $c_r(e) = c(e)$ pour toutes les autres arêtes de $G - xy_r$. (On remarque que par définition $c_0 = c$.)

(f) Montrer que $A_c(x) = A_{c_r}(x)$ pour tout $r \in \{1, 2, \dots, k\}$.

(g) Montrer que c_r est une $(\Delta(G) + 1)$ -coloration propre des arêtes de $G - xy_r$ pour tout $r \in \{1, 2, \dots, k\}$.

(h) Utiliser (a), (b), (c), (d), (e) pour démontrer que pour tout graphe simple G il existe une $(\Delta(G) + 1)$ -coloration propre des arêtes de G .

Solution (a) Si G n'a aucune arête alors $\chi'(G) = 0 = \Delta(G)$ et l'on a bien $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

(b) Soit v un sommet de G . Puisque $d_{G-xy}(v) \leq \Delta(G - xy) \leq \Delta(G)$ et que l'ensemble des couleurs de c est de cardinal égal à $\Delta(G) + 1$, il reste toujours au moins une couleur qui n'est pas utilisée pour les arêtes incidentes à v et ainsi $|A_c(v)| \geq 1$.

(c) S'il existe une couleur $\alpha \in A_c(x) \cap A_c(y)$, c'est-à-dire que α n'est utilisée pour aucune arête incidente à x ou à y , alors en posant $c'(xy) = \alpha$ et $c'(e) = c(e)$ pour toute arête $e \neq xy$ de G on obtient une $(\Delta(G) + 1)$ -coloration propre c' des arêtes de G .

(d) Supposons qu'il n'existe pas de $(\Delta(G) + 1)$ -coloration propre des arêtes de G . Par (b) il existe $\alpha \in A_c(x)$ et $\beta \in A_c(y)$, par (c) on a $A_c(x) \cap A_c(y) = \emptyset$, et ainsi $\alpha \neq \beta$, $\alpha \notin A_c(y)$ et $\beta \notin A_c(x)$, et il existe donc dans $G - xy$ une arête xy' telle que $c(xy') = \beta$ et une arête $x'y$ telle que $c(x'y) = \alpha$. Soit $G_{\alpha, \beta}^c$ le graphe partiel de G induit par l'ensemble des arêtes e de G telles que $c(e) = \alpha$ ou $c(e) = \beta$ et soit C la composante connexe de $G_{\alpha, \beta}^c$ qui contient xy' . Par l'Exercice 75, en procédant à un échange des couleurs α et β sur les arêtes de C on obtient une coloration propre c' des arêtes de $G - xy$ telle que $\beta \in A_{c'}(x)$. Puisqu'on a supposé qu'il n'existe pas de $(\Delta(G) + 1)$ -coloration propre des arêtes de G , par (c) appliqué à la coloration c' , on a que $\beta \notin A_{c'}(y)$, ce qui signifie que $c'(x'y) = \beta$. La couleur de $x'y$ ayant changé cela signifie, par l'Exercice 75 et le fait que $\alpha \in A_c(x)$ et $\beta \in A_c(y)$, que C est une chaîne élémentaire d'extrémités x et y dont les arêtes sont coloriées alternativement α et β .

(e) Si $\chi'(G) > \Delta(G) + 1$ alors par (b) et (c) il existe dans $G - xy$ un voisin y_1 de x tel que $c(xy_1) \in A_c(y)$, ce qui nous donne un début de liste. S'il existe un voisin z de x tel que $c(xz) \in A_c(y_1)$ alors on pose $y_2 = z$ et on a ainsi agrandi la liste. On continue jusqu'à ce qu'il

ne soit plus possible de rajouter un nouveau sommet à la liste (le nombre de voisins de x étant fini, cela se produira), c'est-à-dire jusqu'à avoir une suite $y_0(=y), y_1, \dots, y_k$ de $k+1$ sommets distincts voisins de x , telle que $k \geq 1$, $c(xy_i) \in A_c(y_{i-1})$ pour tout $1 \leq i \leq k$ et pour tout autre voisin z de x , $c(xz) \notin A_c(y_k)$.

(f) Pour tout $r \in \{1, 2, \dots, k\}$, par définition de c_r , la famille des couleurs des arêtes incidentes à x est exactement la même pour c et pour c_r et par conséquent les couleurs absentes en x sont les mêmes, c'est-à-dire $A_c(x) = A_{c_r}(x)$.

(g) Puisque les y_i sont tous distincts, pour chaque arête e incidente à x il existe au plus un i tel que $e = xy_i$. Donc c_r telle que $c_r(xy_i) = c(xy_{i+1})$ pour tout i de 0 à $r-1$ et $c_r(e) = c(e)$ pour toutes les autres arêtes de $G - xy_r$ est une coloration des arêtes de $G - xy_r$. Le nombre de couleurs utilisées par c_r est le même que celui de c et donc au plus $\Delta(G) + 1$. Puisque c est une coloration propre, pour montrer que c_r aussi est une coloration propre il suffit de vérifier que pour chaque sommet incident à au moins une arête pour laquelle il y a eu un changement, c'est-à-dire x et y_1, \dots, y_r , il n'y a pas deux arêtes incidentes de même couleur. Puisque c est une coloration propre et que le degré de x dans $G - xy_r$ est le même que dans $G - xy$, par (f) la propriété est bien vérifiée par x . Pour chaque y_i , $0 \leq i \leq r$, il n'y a de changement que pour la seule arête xy_i . Or, par hypothèse, $c_r(xy_i) = c(xy_{i+1}) \in A_c(y_i)$, donc pour $i < r$ et dans la coloration c_r , xy_i est la seule arête de couleur $c(xy_{i+1})$ parmi les arêtes incidentes à y_i . Pour y_r on a simplement enlevé la couleur d'une arête incidente. Par conséquent il n'existe pas deux arêtes adjacentes auxquelles c_r donne la même couleur et c_r est bien une coloration propre des arêtes de $G - xy_r$.

(h) On montre la propriété en raisonnant par récurrence sur le nombre d'arêtes de G . Par (a) si G n'a pas d'arête alors on a bien $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$. Supposons maintenant que la propriété soit vraie pour un graphe à m arêtes, $m \geq 0$, et considérons un graphe G à $m+1$ arêtes. Soit xy une arête quelconque de G . Le graphe $G - xy$ est de degré maximum inférieur ou égal à $\Delta(G)$, donc par notre hypothèse d'induction et la Remarque 22, il existe une $(\Delta(G) + 1)$ -coloration propre c des arêtes de $G - xy$.

Supposons par l'absurde qu'il n'existe pas de $(\Delta(G) + 1)$ -coloration propre des arêtes de G . Par (e) il existe une suite de sommets distincts $y_0(=y), y_1, \dots, y_k$ telle que chaque y_i est un voisin de x dans G , $c(xy_i) \in A_c(y_{i-1})$ pour tout $1 \leq i \leq k$, et pour tout voisin z de x distinct de y_1, \dots, y_{k-1} , la couleur $c(xz) \notin A_c(y_k)$. Par (b) il existe $\beta \in A_c(y_k)$. Pour la coloration propre c_k des arêtes de $G - xy_k$, on a $\beta \in A_{c_k}(y_k)$ puisque $A_{c_k}(y_k) = A_c(y_k) \cup c(xy_k)$ et donc par (c) $\beta \notin A_{c_k}(x)$. Or par (f) $A_{c_k}(x) = A_c(x)$: il existe donc un voisin z de x tel que $c(xz) = \beta$, et donc par notre hypothèse sur la suite $y_0(=y), y_1, \dots, y_k$ et le fait que G est simple, il existe j , $1 \leq j \leq k-1$, tel que $c(xy_j) = \beta$, $\beta \in A_c(y_{j-1})$ et $\beta = c_k(xy_{j-1})$. Par (b) il existe $\alpha \in A_c(x)$, et donc par (f) la couleur α est absente de x pour toutes les colorations c_i . Par (d) appliqué à $G - xy_k$ et c_k il existe dans $G - xy_k$ une chaîne élémentaire P reliant x et y_k dont les arêtes sont coloriées par c_k alternativement α et β . L'arête de cette chaîne incidente à x sera l'arête xy_{j-1} . On considère maintenant la coloration propre c_{j-1} des arêtes de $G - xy_{j-1}$. Les arêtes de P distinctes de xy_{j-1} ont la même couleur dans c_{j-1} et dans c (puisqu'elles ne sont pas incidentes à x) et donc dans $G - xy_{j-1}$ colorié par c_{j-1} , $P - xy_{j-1}$ est une chaîne élémentaire reliant y_{j-1} et y_k dont les arêtes sont coloriées alternativement α et β et cette chaîne ne peut pas être agrandie puisque $\beta \in A_c(y_{j-1}) \subseteq A_{c_{j-1}}(y_{j-1})$ et $\beta \in A_c(y_k) = A_{c_{j-1}}(y_k)$. Or $\alpha \in A_{c_{j-1}}(x)$ et $\beta \in A_{c_{j-1}}(y_{j-1})$, on obtient ainsi une contradiction de (d) pour le graphe G et la $(\Delta(G) + 1)$ -coloration propre c_{j-1} des arêtes de $G - xy_{j-1}$. \square

Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté sans boucle ni arêtes multiples. Une **k -coloration totale de G** est une fonction c_T de $V \cup E$ dans un ensemble de couleurs \mathcal{C} de cardinal k . Une

k -coloration totale de G est dite **propre** si la restriction de c_T à V est une k -coloration propre des sommets de G , la restriction de c_T à E est une k -coloration propre des arêtes de G et pour tout sommet v et toute arête e incidente à v dans G on a $c_T(v) \neq c_T(e)$. On note $\chi''(G)$ le plus petit nombre de couleurs utilisées par une coloration totale propre de G .

Exercice 77 Calculer $\chi''(K_3)$ et $\chi''(K_4)$.

Solution Une coloration totale propre de K_3 doit utiliser au moins 3 couleurs pour un sommet et ses deux arêtes incidentes. La coloration totale de K_3 indiquée sur la FIG. 1.62 montre que 3 couleurs suffisent et ainsi $\chi''(K_3) = 3$. Dans K_4 une coloration totale peut utiliser la même couleur pour au plus deux éléments : un sommet et une arête ou bien deux arêtes. Comme il y a en tout 10 éléments à colorier, au moins cinq couleurs sont nécessaires. La coloration totale de K_4 indiquée sur la FIG. 1.62 montre que 5 couleurs suffisent et ainsi $\chi''(K_4) = 5$.

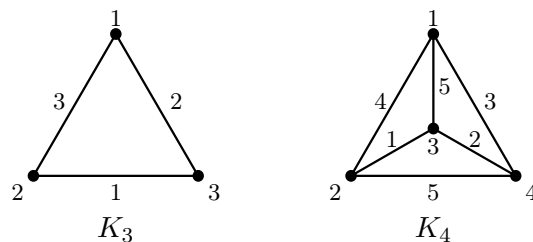


FIGURE 1.62 – Colorations totales propres des graphes K_3 et K_4

Exercice 78 Pour un graphe G quelconque, parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses ? (Donner une preuve ou un contre-exemple.)

- $\chi''(G) \geq \Delta(G) + 1$?
- $\chi''(G) \geq \Delta(G) + 2$?
- $\chi''(G) \leq 2\Delta(G) + 2$?
- Pour tout $n \geq 3$, $\chi''(C_n) = 3$? (où C_n dénote un cycle élémentaire à n sommets)
- $\chi''(G) \leq 2\Delta(G) + 1$?

Solution (a) est vraie. Etant donné un sommet x de degré $\Delta(G)$, toute coloration totale propre de G nécessite $\Delta(G)$ couleurs pour les arêtes incidentes à x et encore une autre couleur pour x lui-même.

(b) est fausse. K_3 est un contre-exemple, car $\Delta(K_3) = 2$ et $\chi''(K_3) = 3$. Un graphe sans arêtes est aussi un contre-exemple.

(c) est vraie. On peut obtenir une coloration totale propre de G en prenant une coloration propre des sommets en $\Delta + 1$ couleurs (celle-ci existe par l'Exercice 67) et une coloration propre des arêtes en $\Delta + 1$ couleurs (celle-ci existe par l'Exercice 76) utilisant des ensembles de couleurs disjoints.

(d) est fausse. On montre que $\chi''(C_4) \geq 4$. En effet, s'il existait une coloration totale propre de C_4 avec 3 couleurs 1, 2, 3, deux sommets non adjacents auraient la même couleur (disons 1) ; mais alors les arêtes devraient recevoir les couleurs 2 et 3 alternativement, et aucun des deux sommets restants ne pourrait plus être colorié, une contradiction.

(e) est vraie. Supposons qu'on nous donne un ensemble \mathcal{C} de $2\Delta + 1$ couleurs. Par l'Exercice 76, on peut colorier les arêtes avec $\Delta(G) + 1$ couleurs de \mathcal{C} . Puis on colorie les sommets un par un : pour chaque sommet x pas encore colorié, x est incident à au plus Δ arêtes et au plus Δ sommets déjà coloriés ; donc on peut trouver une $(2\Delta + 1)$ -ième couleur dans \mathcal{C} pour x . \square

1.7 Arbres

Un **arbre** est un graphe connexe sans cycle. En particulier, les chaînes élémentaires et les étoiles sont des arbres. Voir FIG. 1.63 pour quelques exemples d'arbres.

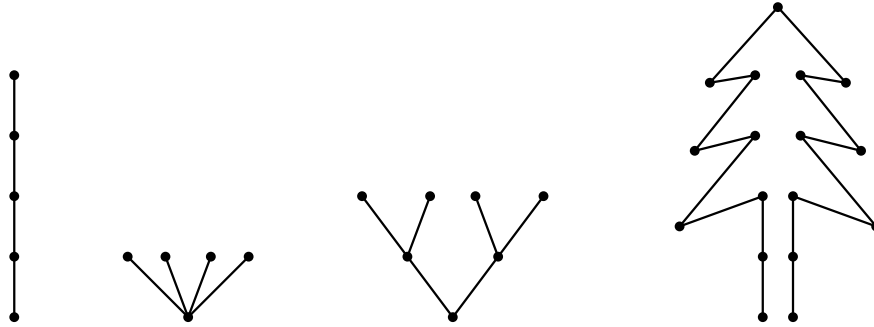


FIGURE 1.63 – Quatre arbres.

Une **forêt** est un graphe sans cycle. L'union des quatre arbres de la FIG. 1.63 est une forêt.

Remarque 25 *Chaque composante connexe d'une forêt est un arbre.*

Remarque 26 *Tout graphe partiel d'un arbre est une forêt.*

Un sommet est **pendant** s'il est de degré 1. Étant donné un graphe $G = (V, E)$, un graphe partiel (V, F) de G qui est un arbre (respectivement une forêt) est appelé **arbre couvrant** (resp. **forêt couvrante**) de G .

Exercice 79 *Donner tous les arbres non-isomorphes à*

- (a) 1, 2 ou 3 sommets,
- (b) 4 sommets,
- (c) 5 sommets.

Solution (a) Pour $1 \leq n \leq 3$, la chaîne élémentaire de longueur $n - 1$ est l'unique arbre à n sommets. (voir FIG. 1.64 (a) pour $n = 3$)

(b) Il existe exactement deux arbres non-isomorphes à 4 sommets. (voir FIG. 1.64 (b))

(c) Il existe exactement trois arbres non-isomorphes à 5 sommets. (voir FIG. 1.64 (c))

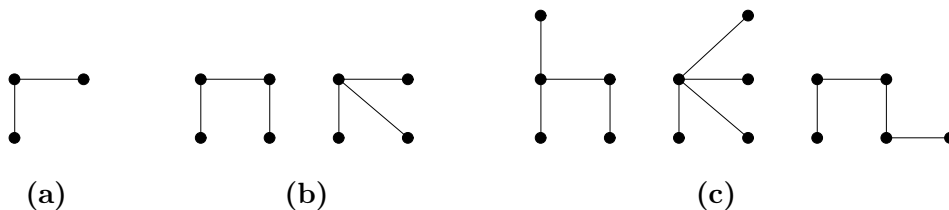


FIGURE 1.64 – Les arbres non-isomorphes à 3, 4 ou 5 sommets.

□

Exercice 80 *Montrer qu'un graphe G sans boucle est un arbre si et seulement si, pour toute paire x, y de sommets distincts de G , il existe une et une seule (x, y) -chaîne élémentaire dans G .*

Solution Par définition, G est connexe si et seulement si, pour toute paire x, y de sommets distincts de G , il existe au moins une (x, y) -chaîne élémentaire dans G . De plus, par l'Exercice 24, G est sans cycle si et seulement si, pour toute paire x, y de sommets distincts de G , il existe au plus une (x, y) -chaîne élémentaire dans G . Ces deux faits impliquent le résultat. \square

Remarque 27 Par l'Exercice 80, en ajoutant une arête entre deux sommets distincts d'un arbre on crée exactement un cycle.

Exercice 81 Soient G un arbre ayant au moins deux sommets et v un sommet de G . Montrer que le nombre de composantes connexes de $G - v$ est égal à $d_G(v)$.

Solution Soient G_1, \dots, G_k les composantes connexes de $G - v$; $k \geq 1$ car G a au moins deux sommets. Puisque G est connexe et par la Remarque 11, le sommet v a au moins un voisin dans chaque G_i ; et puisque G est sans cycle, il en a au plus un. De plus, tout voisin de v se trouve dans un G_i . En conséquence, $k = d_G(v)$. \square

Exercice 82 Soit G un arbre ayant au moins deux sommets.

- (a) Montrer que G possède au moins un sommet pendant.
- (b) Montrer que G possède au moins deux sommets pendants.
- (c) Montrer que pour tout sommet v de G , chaque composante connexe de $G - v$ contient au moins un sommet pendant de G .
- (d) En déduire que G possède au moins $\Delta(G)$ sommets pendants.

Solution (a) Puisque G est un graphe connexe avec au moins deux sommets, on a $d(v) \geq 1$ pour tout $v \in V(G)$. Puisque G est sans cycle, par l'Exercice 25(b), il existe un sommet u tel que $d(u) \leq 1$. Par conséquent $d(u) = 1$ et ainsi u est un sommet pendant de G .

(b) Par (a), il existe dans G un sommet pendant u . Soit P une plus longue chaîne élémentaire de G ayant u comme extrémité. L'autre extrémité de P est un sommet v distinct de u , puisque G est connexe et possède au moins deux sommets. Le sommet v est de degré 1, sinon, d'après l'Exercice 25(a), il aurait au moins deux voisins dans P et appartiendrait donc à un cycle, ce qui contredirait le fait que G est un arbre.

(c) Soient v un sommet de G et U l'ensemble des sommets d'une composante connexe de $G - v$. Par définition de U et par la connexité de G , le voisinage de U est égal à $\{v\}$. Par conséquent, le sous-graphe G' de G induit par $U \cup \{v\}$ est un arbre, et il a au moins deux sommets. Par (b), G' contient au moins deux sommets pendants, l'un d'eux au moins appartient à U . Puisque $N_G(U) = \{v\}$, ce sommet est aussi pendant dans G .

(d) Soit v un sommet de G de degré maximum $\Delta(G)$. Par l'Exercice 81, le nombre de composantes connexes de $G - v$ est égal à $d_G(v) = \Delta(G)$. Par (c), chacune de ces composantes connexes contient un sommet pendant de G et donc G possède au moins $\Delta(G)$ sommets pendants. \square

Exercice 83 Montrer que le graphe obtenu à partir d'un arbre, en supprimant ou en rajoutant, un sommet pendant, est un arbre.

Solution Soit G un arbre.

On considère tout d'abord le cas où l'on supprime un sommet pendant de G . En supprimant un sommet quelconque on ne peut pas créer un cycle, il reste à montrer que si v est un sommet pendant de G alors $G - v$ est connexe. Pour cela, soient u et w deux sommets de $G - v$. Puisque G est connexe et qu'il contient les sommets u et w , il possède une (u, w) -chaîne élémentaire P . Le

sommet v est distinct de u et w et son degré dans G est égal à 1, il ne peut donc pas appartenir à cette chaîne et ainsi les sommets u et w restent connectés par P dans $G - v$. On en conclut que $G - v$ est connexe.

On regarde maintenant le cas où l'on rajoute un nouveau sommet v et une arête reliant v à un sommet u de G ; on appelle G' le graphe ainsi obtenu. Le sommet v étant de degré 1 il n'est pas contenu dans un cycle de G' et $G = G' - v$ est un arbre et donc sans cycle. En conséquence, G' est sans cycle. Il reste à montrer que G' est connexe. Puisque G est un sous-graphe connexe de G' , tous les sommets de G sont dans la même composante connexe de G' . Celle-ci contient u , et donc v aussi, car uv est une arête de G' . On en conclut que G' a une seule composante connexe et donc qu'il est connexe. \square

Exercice 84 *Montrer que le nombre d'arêtes d'un arbre à n sommets est égal à $n - 1$.*

Solution On raisonne par récurrence sur le nombre de sommets. Un arbre à 1 sommet n'a pas d'arête, donc la propriété est vérifiée pour $n = 1$. Supposons que la propriété soit vérifiée pour tous les arbres à $n - 1$ sommets. Soit G un arbre à n sommets. Par l'Exercice 82, G contient un sommet pendant v , et d'après l'Exercice 83, en supprimant v on obtient un arbre G' à $n - 1$ sommets. En vertu de l'hypothèse de récurrence, $|E(G')| = (n - 1) - 1$. Puisque G a exactement une arête de plus que G' (l'unique arête incidente à v), on a $|E(G)| = |E(G')| + 1 = n - 1$. \square

Exercice 85 *Soit F une forêt à n sommets et m arêtes dont le nombre de composantes connexes est égal à k . Montrer que $m = n - k$.*

Solution Soient F_1, \dots, F_k les composantes connexes de F . Chaque F_i est un arbre, donc par l'Exercice 84, $|E(F_i)| = |V(F_i)| - 1$, d'où

$$m = \sum_{i=1}^k |E(F_i)| = \sum_{i=1}^k (|V(F_i)| - 1) = |V(F)| - k = n - k.$$

\square

Exercice 86 *Montrer qu'un graphe G ayant n sommets et au moins n arêtes possède un cycle.*

Solution Sinon G est une forêt. Soit $k \geq 1$ le nombre de composantes connexes de G . D'après l'Exercice 85, on a $|E(G)| = n - k < n$, ce qui contredit l'hypothèse sur le nombre d'arêtes. \square

Exercice 87 *Montrer qu'un graphe G est sans cycle si et seulement si il existe un ordre v_1, v_2, \dots, v_n des sommets de G tel que v_i est de degré inférieur ou égal à 1 dans le sous-graphe G_i de G induit par les i premiers sommets pour tout $i = 1, \dots, n$.*

Solution Montrons d'abord que la condition est nécessaire. Soit donc G un graphe sans cycle. On construit l'ordre en utilisant l'algorithme suivant : Initialement on pose $G_n := G$ et $i := n$ et tant que $i \geq 1$ on répète : choisir un sommet v_i de degré inférieur ou égal à 1 dans G_i , poser $G_{i-1} := G_i - v_i$ et $i := i - 1$.

Pour montrer que l'algorithme est correct, il suffit de remarquer que chaque G_i est sans cycle et que le sommet v_i existe d'après l'Exercice 25(b).

Montrons maintenant que la condition est suffisante. Soit donc v_1, v_2, \dots, v_n un ordre vérifiant les conditions de l'énoncé. On suppose par l'absurde que $G = G_n$ contient un cycle C , et on définit i le plus grand indice tel que v_i est contenu dans C . Alors G_i contient C . Puisque le degré de v_i dans C est au moins 2, l'hypothèse sur l'ordre donne la contradiction suivante : $2 \leq d_C(v_i) \leq d_{G_i}(v_i) \leq 1$. \square

Exercice 88 *Montrer qu'un graphe G contient un arbre couvrant si et seulement si G est connexe.*

Solution Montrons d'abord que la condition est nécessaire. Soit donc F un arbre couvrant de G . Puisque, par définition, F est connexe, d'après la Remarque 10, G l'est aussi.

Montrons maintenant que la condition est suffisante. Supposons que G est un graphe connexe et soit F un graphe partiel connexe de G avec un nombre minimum d'arêtes. Si F contient un cycle C , alors soit e une arête de C . Par l'Exercice 31, $F - e$ est un graphe partiel connexe de G contenant moins d'arêtes que F ce qui contredit la minimalité de F . Par conséquent, F est un graphe partiel de G connexe et sans cycle, et donc un arbre couvrant de G . \square

Exercice 89 *Soit G un graphe à n sommets dont le nombre de composantes connexes est égal à k . Montrer que le nombre maximum d'arêtes d'une forêt couvrante de G est égal à $n - k$.*

Solution Soient F une forêt couvrante de G et k_F le nombre de composantes connexes de F . Puisque chaque composante connexe de F est incluse dans une composante connexe de G , on a $k_F \geq k$. Par l'Exercice 85, $|E(F)| = n - k_F \leq n - k$.

Pour terminer la démonstration, nous montrons qu'il existe une forêt couvrante de G ayant $n - k$ arêtes. Soient G_1, \dots, G_k les composantes connexes de G . Par l'Exercice 88, chaque G_i possède un arbre couvrant F_i . La forêt dont les composantes connexes sont ces F_i est couvrante, et d'après l'Exercice 85, cette forêt contient $n - k$ arêtes. \square

Remarque 28 *On note que, par l'Exercice 85, maximiser le nombre d'arêtes d'une forêt couvrante est équivalent à minimiser le nombre de ses composantes connexes.*

Exercice 90 *Soient G un graphe connexe et u un sommet de G .*

- (a) *Montrer que G possède un sommet v tel que $G - v$ reste connexe.*
- (b) *Montrer que G possède un sommet $v \neq u$ tel que $G - v$ reste connexe.*

Solution (a) G est connexe, donc, par l'Exercice 88, G contient un arbre couvrant F . Par l'Exercice 82(a), F possède un sommet pendant v et ainsi par l'Exercice 83, $F - v$ est un arbre. Or $F - v$ est un graphe partiel de $G - v$ et donc, par l'Exercice 88, $G - v$ est connexe.

(b) Par l'Exercice 82(b), il existe, dans la démonstration précédente, un sommet pendant v différent de u . \square

Exercice 91 *Soit G un graphe connexe à n sommets.*

- (a) *Montrer que pour tout $i = 1, \dots, n - 1$, il existe un sous-ensemble X_i de i sommets tel que $G - X_i$ est connexe.*
- (b) *Montrer que pour tout $u \in V(G)$, il existe un ordre $\{v_1 = u, v_2, \dots, v_n\}$ des sommets de G tel que pour chaque $i = 1, \dots, n$, le sous-graphe G_i de G induit par les i premiers sommets est connexe.*

Solution (a) En répétant i fois l'Exercice 90(a), l'ensemble X_i des i sommets supprimés vérifie les conditions voulues.

(b) On construit l'ordre en utilisant l'algorithme suivant : Initialement on pose $v_1 := u$, $G_n := G$ et $i := n$ et tant que $i > 1$ on répète : choisir un sommet v_i de G_i différent de u tel que $G_{i-1} := G_i - v_i$ soit connexe (par l'Exercice 90(b), un tel sommet existe), poser $i := i - 1$. \square

Exercice 92 Soit G un graphe dont le nombre de sommets est supérieur ou égal à 5. Montrer que G ou \overline{G} contient un cycle.

Solution Soit n le nombre de sommets de G . Supposons que G et \overline{G} ne contiennent pas de cycle, alors d'après l'Exercice 86, $|E(G)| + |E(\overline{G})| \leq 2(n-1)$. Puisque le graphe induit par la réunion des arêtes de G et de \overline{G} est un graphe complet à n sommets, on a $|E(G)| + |E(\overline{G})| = |E(K_n)|$. Par l'Exercice 6, $|E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}$. En combinant les trois inégalités précédentes, on obtient $\frac{n(n-1)}{2} \leq 2(n-1)$, c'est-à-dire $n \leq 4$, ce qui contredit notre hypothèse sur n . \square

Exercice 93 Soit G un graphe à n sommets et m arêtes dont le nombre de composantes connexes est égal à k . Montrer que G contient au moins $m - n + k$ cycles élémentaires distincts.

Solution Soit F une forêt couvrante de G ayant un nombre maximum d'arêtes. Alors, par la Remarque 28, toute arête de G en dehors de F relie deux sommets dans la même composante connexe de F , c'est-à-dire dans un même arbre de F . Par l'Exercice 27, l'adjonction d'une arête à F crée un cycle unique qui est, d'après l'Exercice 18, élémentaire. Les cycles ainsi obtenus contiennent chacun une et une seule arête en dehors de F , ils sont donc distincts et leur nombre est égal $m - (n - k)$ puisque, par l'Exercice 89, F a $n - k$ arêtes. \square

Exercice 94 Étant donnés $n \geq 2$ nombres entiers positifs d_1, d_2, \dots, d_n , montrer qu'il existe un arbre à n sommets tel que d_1, d_2, \dots, d_n soit la liste des degrés de ses sommets si et seulement si

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2. \quad (1.4)$$

Solution Montrons d'abord que la condition est nécessaire. Soit donc F un arbre dont la liste des degrés des sommets est d_1, d_2, \dots, d_n . Alors, d'après les Exercices 4 et 84,

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2|E(F)| = 2(n-1).$$

Montrons maintenant que la condition est suffisante en raisonnant par récurrence sur n . Si $n = 2$ alors (1.4) implique que $d_1 = d_2 = 1$, le graphe K_2 est un arbre ayant ces degrés. Maintenant supposons que la condition est suffisante pour $n-1$. Soient d_1, d_2, \dots, d_n , $n \geq 3$ nombres entiers positifs qui satisfont (1.4). On peut poser sans perte de généralité $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$. A cause de (1.4), $d_n = 1$ car sinon

$$2n - 2 = \sum_{i=1}^n d_i \geq \sum_{i=1}^n 2 = 2n,$$

ce qui est une contradiction. De même, $d_1 \geq 2$ car sinon

$$2n - 2 = \sum_{i=1}^n d_i \leq \sum_{i=1}^n 1 = n$$

c'est-à-dire $n \leq 2$, ce qui contredit $n \geq 3$.

On considère la liste $d_1 - 1, d_2, \dots, d_{n-1}$. Par ce qui précède, ces entiers sont positifs et leur somme est égale à $(\sum_{i=1}^n d_i) - 2$ et donc par (1.4) à $(2n - 2) - 2 = 2(n - 2)$. En vertu de

l'hypothèse de récurrence il existe donc un arbre F' à $n - 1$ sommets v_1, \dots, v_{n-1} de degrés $d_1 - 1, d_2, \dots, d_{n-1}$. Soit F le graphe obtenu à partir de F' en ajoutant un nouveau sommet v_n et une nouvelle arête v_1v_n . Par l'Exercice 83, F est un arbre et par construction, ses sommets ont les degrés d_1, d_2, \dots, d_n . \square

Étant donné un graphe G et un arbre couvrant T de G , pour une arête f de G qui n'est pas dans T , on appelle **cycle fondamental de $T + f$** , l'unique cycle C_f de $T + f$. Par la Remarque 27, C_f existe.

Remarque 29 Soient T un arbre couvrant d'un graphe G et f une arête de G qui n'est pas dans T . Alors le cycle fondamental de $T + f$ est élémentaire et f est son unique arête qui n'est pas dans T .

Exercice 95 Soit G un graphe connexe. Montrer que G est un arbre si et seulement si pour toute arête e de G , le graphe $G - e$ n'est pas connexe.

Solution Montrons d'abord que la condition est nécessaire. Soit donc G un arbre. Pour toute arête uv de G , d'après l'Exercice 80, le graphe $G - uv$ ne contient pas de (u, v) -chaîne élémentaire et donc d'après l'Exercice 17, $G - uv$ ne contient pas de (u, v) -chaîne. Par conséquent $G - uv$ n'est pas connexe.

Montrons maintenant par l'absurde que la condition est suffisante. Supposons donc que G ne soit pas un arbre, c'est-à-dire que, puisque G est connexe par hypothèse, G contienne un cycle C . Alors pour une arête quelconque e de C , d'après l'Exercice 31, $G - e$ reste connexe, ce qui est une contradiction. \square

Remarque 30 Par l'Exercice 95, le graphe obtenu à partir d'un arbre en supprimant une arête n'est plus connexe et, par la Remarque 12, ce graphe a exactement deux composantes connexes.

Remarque 31 Par l'Exercice 95, un graphe G est une forêt si et seulement si pour toute arête e de G , le graphe $G - e$ a plus de composantes connexes que G . De manière équivalente on a que, en rajoutant une arête e à une forêt G , le graphe G' obtenu reste une forêt si et seulement si e est une coupe de G' .

Étant donné un arbre $T = (V, F)$, pour une arête f de T (FIG. 1.65 (a)), on appelle **bipartition fondamentale de $T - f$** , la bipartition $\{X, V \setminus X\}$ constituée par l'ensemble des sommets de chacune des deux composantes connexes de $T - f$ (FIG. 1.65 (b)). Par la Remarque 30, cette bipartition fondamentale existe bien pour toute arête f de T .

Étant donné un graphe G et un arbre couvrant T de G , pour une arête f de T (FIG. 1.65 (c)), on appelle **coupe fondamentale associée à $T - f$** , la coupe de G définie par la bipartition fondamentale de $T - f$ (FIG. 1.65 (d)).

Remarque 32 Si f est une arête d'un arbre couvrant T d'un graphe G , alors elle est l'unique arête de T qui appartient à la coupe fondamentale de G associée à $T - f$.

Exercice 96 Soit F un sous-ensemble d'arêtes d'un graphe G . Montrer que $G(F)$ est un arbre couvrant de G si et seulement si F intersecte toutes les coupes de G et est minimal pour cette propriété.

Solution Par l'Exercice 28, $G(F)$ est connexe si et seulement si F intersecte toutes les coupes de G . Par conséquent, cet exercice est équivalent à l'Exercice 95. \square

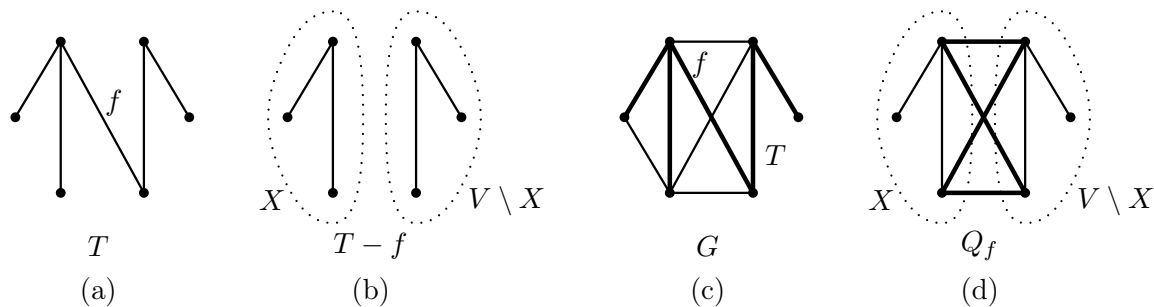


FIGURE 1.65 – (a) Un arbre T et une arête f de T , (b) la bipartition fondamentale $\{X, V \setminus X\}$ de $T - f$, (c) un graphe G , un arbre couvrant T de G et une arête f de T , (d) la coupe fondamentale Q_f de G définie par la bipartition fondamentale $\{X, V \setminus X\}$ de $T - f$.

Exercice 97 Soit F un sous-ensemble d'arêtes d'un graphe connexe $G = (V, E)$. Montrer que $G(F)$ est un arbre couvrant de G si et seulement si $E \setminus F$ intersecte tous les cycles de G et est minimal pour cette propriété.

Solution Montrons d'abord que la condition est nécessaire. Soit donc $G(F)$ un arbre couvrant de G . Puisque $G(F)$ est sans cycle, $E \setminus F$ intersecte tous les cycles de G . De plus, pour toute arête e de $E \setminus F$, e est l'unique arête de F contenue dans le cycle fondamental de $G(F) + e$. Par conséquent, $(E \setminus F) \setminus \{e\}$ n'intersecte plus ce cycle et F est bien minimal pour la propriété.

Montrons maintenant que la condition est suffisante. Puisque $E \setminus F$ intersecte tous les cycles de G , $G(F)$ est sans cycle. Supposons par l'absurde que $G(F)$ ne soit pas un arbre couvrant de G , c'est-à-dire que $G(F)$ ait plusieurs composantes connexes. Soit X l'ensemble des sommets de l'une d'elles. Puisque G est connexe, par l'Exercice 28, il existe une arête e de $E \setminus F$ reliant X et $V \setminus X$. Donc cette arête e relie X à une autre composante connexe de $G(F)$ et ainsi par la Remarque 12, $G(F \cup \{e\})$ est sans cycle, c'est-à-dire que $(E \setminus F) \setminus e$ intersecte tous les cycles de G , ce qui contredit la minimalité de $E \setminus F$. \square

Exercice 98 Soient G un graphe, H un arbre couvrant de G , f une arête de G qui n'est pas dans H et e une arête de H . Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) le graphe obtenu à partir de H en supprimant e et en ajoutant f est un arbre couvrant de G ,
- (b) e appartient au cycle fondamental de $H + f$,
- (c) f appartient à la coupe fondamentale de G associée à $H - e$.

Solution (a) \iff (b) : Soit C_f le cycle fondamental de $H + f$. Par l'Exercice 31, le graphe $H + f - e$ est connexe et sans cycle (donc un arbre couvrant de G) si et seulement si e appartient à C_f .

(a) \iff (c) : Soit Q_e la coupe fondamentale de G associée à $H - e$. Par la Remarque 12, le graphe $H - e + f$ est connexe et sans cycle (donc un arbre couvrant de G) si et seulement si f appartient à Q_e . \square

Exercice 99 Soient F_1 et F_2 deux forêts sur le même ensemble V de sommets. Montrer que si F_2 a plus d'arêtes que F_1 alors il existe une arête e de F_2 qui n'est pas dans F_1 telle que $F_1 + e$ soit une forêt.

Solution Soit $n = |V|$. Pour $i = 1, 2$, on note m_i le nombre d'arêtes et k_i le nombre de composantes connexes de F_i . Par l'Exercice 85 et l'hypothèse, on a $n - k_1 = m_1 < m_2 = n - k_2$,

donc $k_2 < k_1$. Soit $G = (V, E(F_1) \cup E(F_2))$ et k le nombre de composantes connexes de G . Remarquons que G s'obtient en ajoutant à F_1 les arêtes de F_2 qui ne sont pas dans F_1 ou de façon équivalente en ajoutant à F_2 les arêtes de F_1 qui ne sont pas dans F_2 . Par la Remarque 12, on en déduit d'une part que $k \leq k_2$ et ainsi, par l'inégalité précédente, $k < k_1$; et d'autre part qu'il existe donc une arête e de G telle que les deux extrémités de e appartiennent à des composantes connexes de F_1 distinctes. Donc $e \in E(F_2) \setminus E(F_1)$ et, par la Remarque 12, $F_1 + e$ est une forêt. \square

Exercice 100 Soient G_1 et G_2 deux arbres sur le même ensemble V de sommets. Montrer que pour toute arête e_1 de G_1 il existe une arête e_2 de G_2 telle que $G_1 - e_1 + e_2$ et $G_2 + e_1 - e_2$ soient des arbres.

Solution Soit $e_1 = wz$ une arête quelconque de G_1 . Voir FIG. 1.66. On peut supposer que wz n'est pas une arête de G_2 , car sinon $e_2 = e_1$ convient.

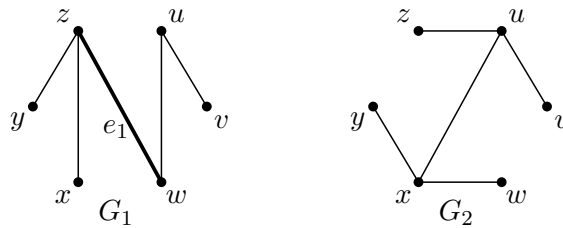


FIGURE 1.66 – Les arbres G_1 et G_2 et l'arête e_1 .

Par la Remarque 30, $G_1 - e_1$ a exactement deux composantes connexes, on dénote leurs ensembles de sommets par X et $V \setminus X$.

Nous considérons les conditions qu'une arête e de G_2 doit vérifier pour que $G_1 - e_1 + e$ et $G_2 + e_1 - e$ soient des arbres.

- Par la Remarque 12, une condition nécessaire et suffisante pour que $G_1 - e_1 + e$ soit un arbre est que e ait une extrémité dans X et l'autre dans $V \setminus X$. Voir FIG. 1.67(a).
- D'après l'Exercice 98, une condition nécessaire et suffisante pour que $G_2 + e_1 - e$ soit un arbre est que e se trouve dans la chaîne unique P de G_2 reliant les deux extrémités de e_1 . Voir FIG. 1.67(b).

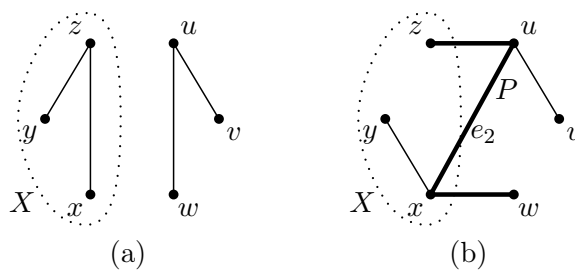
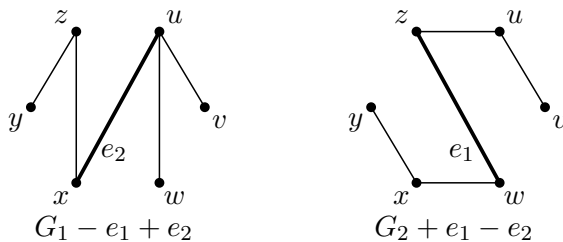


FIGURE 1.67 – (a) Le graphe $G_1 - e_1$ et l'ensemble X , (b) le graphe G_2 et la chaîne P .

Puisque les extrémités de e_1 et donc celles de P , sont l'une dans X et l'autre dans $V \setminus X$, par l'Exercice 20, P contient au moins une arête reliant X et $V \setminus X$, soit e_2 une telle arête. Ainsi e_2 satisfait les deux conditions ci-dessus, et $G_1 - e_1 + e_2$ et $G_2 + e_1 - e_2$ sont effectivement des arbres. Voir FIG. 1.68.

On peut présenter la démonstration ci-dessus (pour le cas où e_1 n'est pas dans G_2) de la manière suivante. Soient $G := (V, E(G_1) \cup E(G_2))$, Q_1 la coupe fondamentale de G associée à

FIGURE 1.68 – Les arbres $G_1 - e_1 + e_2$ et $G_2 + e_1 - e_2$.

$G_1 - e_1$ et C_1 le cycle fondamental de $G_2 + e_1$. Pour une arête e de G_2 : par la Remarque 12 et l'Exercice 98, $G_1 - e_1 + e$ et $G_2 + e_1 - e$ sont des arbres si et seulement si e appartient à $Q_1 \cap C_1$. Puisque les arêtes de C_1 distinctes de e_1 sont toutes dans G_2 , n'importe quelle arête de $Q_1 \cap C_1 \setminus \{e_1\}$ convient comme e_2 . Or par l'Exercice 45, $Q_1 \cap C_1$ est de cardinal pair, et contient e_1 par définition; par conséquent $|Q_1 \cap C_1| \geq 2$ et e_2 existe. \square

1.8 Arbre couvrant de coût minimum

Étant donné un graphe $G = (V, E)$, une **fonction de coût sur les arêtes** de G , $c : E \rightarrow \mathbb{R}$, est l'affectation d'une valeur $c(e)$ à chaque arête e de G . Soit F un sous-ensemble quelconque d'arêtes de G . On définit la **capacité de F** comme le coût minimum d'une arête de F et le **c -coût de F** (ou **coût** s'il n'y a pas d'ambiguïté), noté $c(F)$, comme la somme des coûts des arêtes de F :

$$c(F) = \sum_{e \in F} c(e).$$

Par extension, le **c -coût du graphe G** , noté $c(G)$, est égal au c -coût de l'ensemble E de ses arêtes.

Dans cette section nous nous intéressons à la recherche d'un arbre couvrant de G de coût minimum.

Remarque 33 Si G est connexe alors, par les Exercices 88 et 7, le nombre d'arbres couvrants de G est non-nul et fini. Par conséquent, le coût minimum d'un arbre couvrant de G est bien défini.

Remarque 34 Le problème de l'arbre couvrant de coût maximum est équivalent à celui de l'arbre couvrant de coût minimum; il suffit de multiplier la fonction de coût par -1 .

Remarque 35 Pour le problème de l'arbre couvrant de G de coût minimum on peut supposer que la fonction de coût est positive. En effet, par l'Exercice 84, tous les arbres couvrants de G contiennent le même nombre d'arêtes, donc en ajoutant la même valeur aux coûts des arêtes de G , les arbres couvrants de G de coût minimum restent identiques.

Remarque 36 Soient G un graphe connexe et c une fonction de coût positive sur les arêtes. Le problème de trouver un sous-ensemble F d'arêtes de G de coût minimum tel que $G - F$ soit sans cycle se ramène à celui de l'arbre couvrant de coût maximum. En effet, ce problème est équivalent à trouver un graphe partiel de G qui soit sans cycle, de coût maximum, et puisque les coûts sont positifs et G est connexe, un tel graphe partiel est un arbre couvrant de coût maximum.

Remarque 37 Soient G un graphe connexe et c une fonction de coût strictement positive sur les arêtes de G . Le problème de trouver un arbre couvrant de G qui minimise le produit des coûts de ses arêtes se ramène à celui de l'arbre couvrant de G de c' -coût minimum où $c'(e) = \log(c(e))$ pour toute arête e de G .

Remarque 38 Soient G un graphe connexe et c une fonction de coût sur les arêtes de G . Le problème de trouver un arbre couvrant de G qui minimise la racine de la somme des carrés des coûts de ses arêtes se ramène à celui de l'arbre couvrant de G de c' -coût minimum où $c'(e) = c^2(e)$ pour toute arête e de G .

Dans la suite nous utiliserons la notation $\mathcal{F}_{(G,c)}$ pour désigner l'ensemble des sous-ensembles d'arêtes de G qui appartiennent à au moins un arbre couvrant de G de coût minimum. Par la Remarque 26, chaque élément de $\mathcal{F}_{(G,c)}$ induit une forêt, mais on remarque qu'il peut exister des forêts de G dont l'ensemble des arêtes n'appartient pas à $\mathcal{F}_{(G,c)}$.

Exercice 101 Soient G un graphe connexe et c une fonction de coût sur les arêtes de G . Montrer que si tous les coûts sont différents alors il existe un seul arbre couvrant de G de coût minimum.

Solution Puisque G est connexe, par la Remarque 33, il existe au moins un arbre couvrant de G de coût minimum. Supposons que G possède deux arbres couvrants différents de coût minimum, $G_1 = (V, E_1)$ et $G_2 = (V, E_2)$. Puisque G_1 et G_2 sont différents, il existe une arête e_1 qui appartient à l'un et pas à l'autre, on peut supposer que $e_1 \in E_1 \setminus E_2$. D'après l'Exercice 100, il existe une arête $e_2 \in E_2$ telle que $G_1 - e_1 + e_2$ et $G_2 + e_1 - e_2$ soient des arbres couvrants de G . Les arbres couvrants G_1 et G_2 étant supposés de coût minimum, on a

$$\begin{aligned} c(G_1 - e_1 + e_2) &\geq c(G_1), \\ c(G_2 + e_1 - e_2) &\geq c(G_2), \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} c(G_1 - e_1 + e_2) &= c(G_1) - c(e_1) + c(e_2), \\ c(G_2 + e_1 - e_2) &= c(G_2) + c(e_1) - c(e_2), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} c(e_2) &\geq c(e_1), \\ c(e_1) &\geq c(e_2). \end{aligned}$$

Par conséquent, $c(e_1) = c(e_2)$, or e_1 et e_2 sont distincts, ceci contredit l'hypothèse de l'exercice \square

Exercice 102 Soient G un graphe connexe et c une fonction de coût sur les arêtes de G . Montrer que si F appartient à $\mathcal{F}_{(G,c)}$, Q est une coupe disjointe de F , et e est une arête de coût minimum dans Q , alors l'ensemble obtenu en ajoutant l'arête e à F appartient encore à $\mathcal{F}_{(G,c)}$.

Solution Soient G un graphe connexe et c une fonction de coût sur ses arêtes (FIG. 1.69(a)). Supposons que F , Q et e vérifient l'hypothèse de l'énoncé avec $Q = \delta(X)$ et $e = uv$ où $u \in X$ et $v \in V \setminus X$ (FIG. 1.69(b)). Puisque $F \in \mathcal{F}_{(G,c)}$, il existe $G' = (V, F')$, un arbre couvrant de G de coût minimum contenant toutes les arêtes de F (FIG. 1.69(c)). Si $e \in F'$, alors $F \cup \{e\} \subseteq F'$ et donc $F \cup \{e\} \in \mathcal{F}_{(G,c)}$. Sinon, soit P une (u, v) -chaîne de G' (FIG. 1.69(d)). Par l'Exercice 20, il

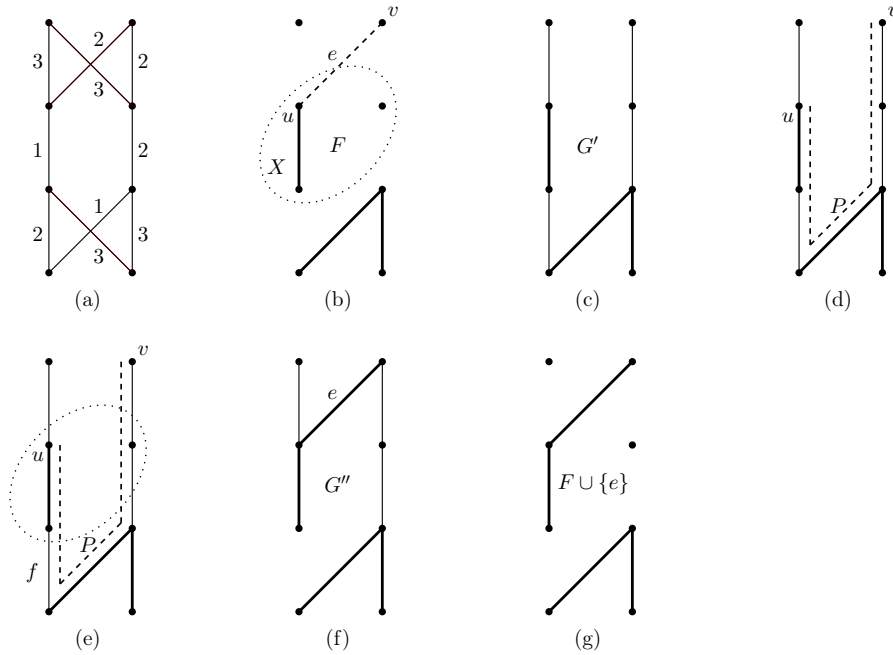


FIGURE 1.69 – (a) Le graphe G et les coûts de ses arêtes, (b) l'ensemble F d'arêtes, l'ensemble X de sommets et l'arête $e = uv$, (c) un arbre couvrant $G' = (V, F')$ de G de coût minimum, (d) la (u, v) -chaîne P de G' , (e) une arête $f \in E(P) \cap Q$, (f) l'arbre couvrant G'' de G , (g) $F \cup \{e\}$.

existe au moins une arête f appartenant à la fois à la chaîne P et à la coupe Q (FIG. 1.69(e)). Donc, $f \neq e$ et d'après l'Exercice 98, $G'' := G' + e - f$ est un arbre couvrant de G (FIG. 1.69(f)).

Puisque e est une arête de Q de coût minimum et f est une arête de Q , $c(f) \geq c(e)$. Donc $c(G'') = c(G') + c(e) - c(f) \leq c(G')$. De plus, G' étant un arbre couvrant de G de coût minimum, on a $c(G') \leq c(G'')$. Par conséquent, $c(G') = c(G'')$ et ainsi G'' est aussi un arbre couvrant de G de coût minimum. Puisque f appartient à Q qui est disjointe de F , on a que f n'appartient pas à F , et de plus $f \neq e$, donc $F \cup \{e\} \subseteq E(G'')$ d'où $F \cup \{e\} \in \mathcal{F}_{(G,c)}$ (FIG. 1.69(g)). \square

Exercice 103 Soient G un graphe connexe, c une fonction de coût sur les arêtes de G et e une arête de G . Montrer qu'il existe un arbre couvrant de coût minimum contenant e si et seulement si il existe une coupe de G telle que e soit une arête de coût minimum dans cette coupe.

Solution Montrons d'abord que la condition est nécessaire. Supposons donc qu'il existe F , un arbre couvrant de G de coût minimum, qui contient e . Par définition, l'arête e appartient à la coupe fondamentale Q associée à $F - e$. Pour toute arête f de Q , d'après l'Exercice 98, $F' := F - e + f$ est un arbre couvrant de G et donc par l'hypothèse sur F , $c(F) - c(e) + c(f) = c(F') \geq c(F)$. Par conséquent, $c(f) \geq c(e)$ et e est bien une arête de coût minimum dans Q .

Montrons maintenant que la condition est suffisante. Supposons que e soit une arête de coût minimum dans une coupe Q . Par l'Exercice 102, appliqué à $F = \emptyset$ (qui est évidemment dans $\mathcal{F}_{(G,c)}$), Q et e , on obtient que $e \in \mathcal{F}_{(G,c)}$, en d'autres termes, l'arête e appartient à un arbre couvrant de G de coût minimum. \square

Remarque 39 Pour un problème d'optimisation, le principe d'un algorithme glouton est de construire une solution pas à pas, en opérant à chaque étape le choix qui semble le meilleur à cet instant, sans jamais revenir sur ces décisions, dans l'espoir d'obtenir une solution optimale. Selon le problème considéré l'algorithme glouton peut ou non produire une solution optimale.

ALGORITHME DE KRUSKAL (GROUTON OPTIMISTE) :

ENTRÉE : Un graphe connexe G et une fonction de coût c sur les arêtes de G .

SORTIE : Un arbre couvrant F de G de coût minimum.

Etape 0 : *Prétraitement des données.*
 Trier les arêtes de G par ordre de coût non-décroissant : $c(e_1) \leq c(e_2) \leq \dots \leq c(e_m)$.

Etape 1 : *Initialisation.*
 $F_0 := (V, \emptyset)$.

Etape 2 : *Construction de l'arbre.*
 Pour $i = 1$ à m faire :
 si $F_{i-1} + e_i$ est une forêt, alors $F_i := F_{i-1} + e_i$,
 sinon $F_i := F_{i-1}$.

Etape 3 : *Fin de l'algorithme.*
 $F := F_m$,
 STOP.

FIGURE 1.70 – Algorithme de Kruskal

Exercice 104 Exécuter l'algorithme de Kruskal (FIG. 1.70) sur le graphe de la FIG. 1.71.

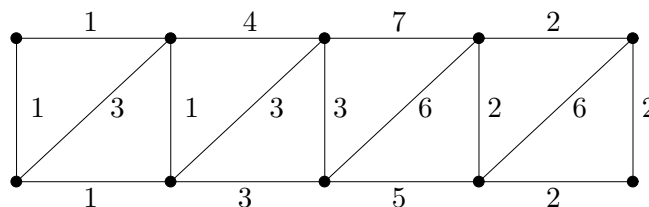


FIGURE 1.71 – Graphe et fonction de coût sur les arêtes.

Solution A l'étape 0 de l'algorithme de Kruskal, on peut choisir l'ordre des arêtes représenté sur la FIG. 1.72. (On remarque que d'autres choix seraient possibles.)

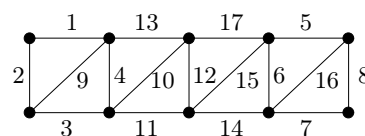


FIGURE 1.72 – Un ordre par coût non-décroissant des arêtes du graphe de la FIG. 1.71.

L'étape de construction de l'arbre basée sur cet ordre est illustrée dans la FIG. 1.73. (On n'a représenté que les itérations où une arête a été rajoutée.)

Le coût de l'arbre couvrant obtenu est égal à 20. □

Exercice 105 Soient G un graphe connexe et c une fonction de coût sur les arêtes de G . Soient e_1, \dots, e_m un ordre des arêtes de G par coût non-décroissant et F le graphe obtenu par l'algorithme de Kruskal basé sur cet ordre. Montrer que l'arête e_i ($1 \leq i \leq m$) appartient à F si et seulement si il existe une coupe de G dont e_i est l'arête d'indice minimum.

Solution Montrons d'abord que la condition est nécessaire. Supposons donc que l'arête e_i appartient à F , c'est-à-dire que $F_i = F_{i-1} + e_i$. Il en découle, par la Remarque 31, qu'il existe $X \subset V$

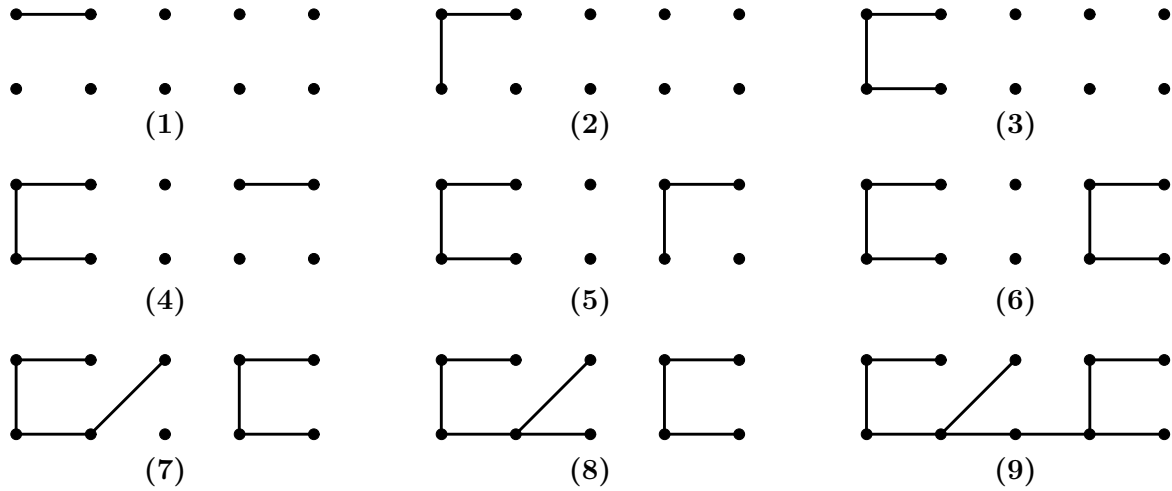


FIGURE 1.73 – Déroulement de l'Etape 2 de l'algorithme de Kruskal basé sur l'ordre de la FIG. 1.72.

tel que $e_i = \delta_{F_i}(X)$. Pour tout $j < i$, $E(F_j) \subseteq E(F_{i-1})$, donc $\delta_{F_j}(X) = \emptyset$. Supposons qu'il existe $j < i$ tel que $e_j \in \delta_G(X)$, alors, puisque $\delta_{F_{j-1}}(X) = \emptyset$, par la Remarque 31, $F_j = F_{j-1} + e_j$, et donc $e_j \in \delta_{F_j}(X) = \emptyset$, ce qui est impossible. Par conséquent, e_i est d'indice minimum dans $\delta_G(X)$.

Montrons maintenant que la condition est suffisante. Supposons qu'il existe une coupe $\delta_G(X)$ dont e_i est l'arête d'indice minimum. Puisque les arêtes de F_{i-1} sont d'indices plus petits que i , la coupe $\delta_{F_{i-1}}(X)$ est vide. Par conséquent, e_i est une coupe de $F_{i-1} + e_i$, et donc par la Remarque 31, $F_i = F_{i-1} + e_i$. Puisque $E(F_i) \subseteq E(F)$, e_i appartient à F . \square

Remarque 40 Soient G un graphe connexe et c une fonction de coût sur les arêtes de G . Soient e_1, \dots, e_m un ordre des arêtes de G par coût non-décroissant et F le graphe obtenu par l'algorithme de Kruskal basé sur cet ordre. Par l'Exercice 105, pour toute coupe Q de G , F contient l'arête d'indice minimum dans Q .

Exercice 106 (Justification de l'algorithme de Kruskal (FIG. 1.70))

Montrer que F fourni par l'algorithme de Kruskal est un arbre couvrant de G de coût minimum.

Solution On commence par montrer que F est un arbre couvrant de G . A l'Etape 1, F_0 est une forêt, et donc à l'Etape 2, chaque F_i , en particulier $F(= F_m)$, est une forêt aussi. Il reste à vérifier que F est connexe. Pour cela, il suffit de montrer, par l'Exercice 28, que pour un sous-ensemble quelconque X de sommets, on a $|\delta_F(X)| \geq 1$. Puisque G est connexe, d'après l'Exercice 28, $\delta_G(X)$ est non-vide, et soit donc e_i l'arête d'indice minimum dans cette coupe (pour l'ordre calculé à l'Etape 0). Par la Remarque 40, F contient e_i , et par conséquent, $|\delta_F(X)| \geq 1$.

Maintenant il reste à prouver que F est de coût minimum. Pour cela, on va démontrer par récurrence sur i ($0 \leq i \leq m$), que l'ensemble E_i des arêtes de F_i est dans $\mathcal{F}_{(G,c)}$. Pour $i = 0$, $E_0 = \emptyset \in \mathcal{F}_{(G,c)}$. A la i -ième itération de l'Etape 2 ($1 \leq i \leq m$), si on ne rajoute pas l'arête e_i , alors $E_i = E_{i-1} \in \mathcal{F}_{(G,c)}$. Maintenant si l'arête $e_i = uv$ est ajoutée à F_{i-1} , alors, par l'Exercice 105, il existe une coupe Q de G telle que e_i est d'indice minimum dans Q , et par définition de l'ordre des arêtes, e_i est une arête de coût minimum dans Q . Puisque F_{i-1} ne peut contenir que

des arêtes d'indice plus petit que i , Q et F_{i-1} sont disjoints. D'après l'hypothèse de récurrence et par l'Exercice 102, $E_i = E_{i-1} \cup \{e_i\} \in \mathcal{F}_{(G,c)}$. \square

Exercice 107 Soient F un graphe partiel d'un graphe G et c une fonction de coût sur les arêtes de G . Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) F est un arbre couvrant de G de coût minimum,
- (b) F est sans cycle et toute coupe Q de G possède une arête de coût minimum dans Q qui appartient à F ,
- (c) F est un arbre et toute arête f de F est une arête de coût minimum dans la coupe fondamentale de G associée à $F - f$.

Solution (a) implique (b) : On suppose que F est un arbre couvrant de G de coût minimum, donc F est bien sans cycle. Soient Q une coupe quelconque de G et f une arête de coût minimum de Q . Si f appartient à F , alors (b) est bien vérifiée. On suppose donc que f n'appartient pas à F . Soit C_f le cycle fondamental de $F + f$. Puisque le cycle C_f contient une arête de Q (l'arête f), par l'Exercice 45, il en contient une autre, notée e . D'après l'Exercice 98, $F' := F + f - e$ est aussi un arbre couvrant de G , donc par (a), $c(F) \leq c(F') = c(F) + c(f) - c(e)$, c'est-à-dire, $c(e) \leq c(f)$, et puisque f est une arête de coût minimum dans Q , e l'est également. De plus, e est une arête de C_f différente de f , donc e appartient à F .

(b) implique (c) : Par (b) et l'Exercice 28, F est connexe et sans cycle, F est donc un arbre. Soient f une arête quelconque de F et Q_f la coupe fondamentale de G associée à $F - f$. Par (b), F contient une arête de coût minimum de Q_f or f est la seule arête de F qui appartient à Q_f .

(c) implique (a) : Nous présentons deux démonstrations différentes de cette implication.

Première démonstration : L'arbre F peut être obtenu à partir du graphe (V, \emptyset) en rajoutant les arêtes de F une à une dans un ordre quelconque e_1, \dots, e_{n-1} . Soient $F_0 = \emptyset$ et $F_i = F_{i-1} + e_i$ pour $i = 1, \dots, n-1$. On va démontrer par récurrence sur i ($0 \leq i \leq n-1$), que l'ensemble F_i est dans $\mathcal{F}_{(G,c)}$. Pour $i = 0$, $F_0 = \emptyset \in \mathcal{F}_{(G,c)}$. Supposons que $F_{i-1} \in \mathcal{F}_{(G,c)}$ pour $i \geq 1$. Par (c), l'arête e_i est de coût minimum dans la coupe fondamentale Q_{e_i} de G associée à $F - e_i$; par la Remarque 32, F_{i-1} et Q_{e_i} sont disjoints; donc par l'Exercice 102, $F_i = F_{i-1} \cup \{e_i\} \in \mathcal{F}_{(G,c)}$. Par conséquent, il existe un arbre de coût minimum qui contient toutes les arêtes de F_{n-1} , or (V, F_{n-1}) est égal à F qui est un arbre; F est donc un arbre couvrant de G de coût minimum.

Deuxième démonstration : Soit F' un arbre couvrant de G de coût minimum tel que le nombre d'arêtes en commun avec F soit maximum. Si $F = F'$, alors F est un arbre couvrant de G de coût minimum. Supposons donc que F et F' sont distincts. Par (c), F est un arbre, il a donc par l'Exercice 84, le même nombre d'arêtes que F' ; il existe alors une arête f de F qui n'est pas dans F' . Soient Q_f la coupe fondamentale de G associée à $F - f$ et C'_f le cycle fondamental de $F' + f$. Puisque le cycle C'_f contient une arête de Q_f (l'arête f), par l'Exercice 45, il en contient une autre, notée e . Par (c), f est une arête de coût minimum dans Q_f ; or $e \in Q_f$, on a donc

$$c(f) \leq c(e). \quad (1.5)$$

D'après l'Exercice 98, $F'' := F' + f - e$ est aussi un arbre couvrant de G . Puisque F' est un arbre couvrant de G de coût minimum et par (1.5), on obtient

$$c(F') \leq c(F'') = c(F') + c(f) - c(e) \leq c(F').$$

Par conséquent, $c(F') = c(F'')$ et F'' est un arbre couvrant de G de coût minimum. Or e est une arête de Q_f différente de f ; par la Remarque 32, f est l'unique arête de F qui appartient à Q_f ; et donc e n'appartient pas à F . En conclusion, F'' est un arbre couvrant de G de coût minimum ayant une arête de plus que F' en commun avec F ; ce qui est une contradiction. \square

Exercice 108 Soient F un graphe partiel d'un graphe G et c une fonction de coût sur les arêtes de G . Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) F est un arbre couvrant de G de coût minimum,
- (b) F est connexe et pour tout cycle C de G , il existe une arête de coût maximum dans C qui n'appartient pas à F ,
- (c) F est un arbre et toute arête e de G qui n'est pas dans F est une arête de coût maximum dans le cycle fondamental de $F + e$.

Solution (a) implique (b) : On suppose que F est un arbre couvrant de G de coût minimum, donc F est connexe. Soient C un cycle quelconque de G et e une arête de coût maximum de C . Si e n'appartient pas à F , alors (b) est bien vérifiée. On suppose donc que e appartient à F . Soit Q_e la coupe fondamentale de G associée à $F - e$. Puisque la coupe Q_e contient une arête de C , l'arête e , par l'Exercice 45, elle en contient une autre, notée f . D'après la Remarque 12, $F' := F - e + f$ est aussi un arbre couvrant de G , donc par (a), $c(F) \leq c(F') = c(F) - c(e) + c(f)$, c'est-à-dire, $c(e) \leq c(f)$, et puisque e est une arête de coût maximum dans C , f l'est également. De plus, f est une arête de Q_e différente de e , donc f n'appartient pas à F .

(b) implique (c) : Par (b), F est connexe et de plus sans cycle, puisque $E(G) \setminus E(F)$ intersecte tous les cycles de G ; F est donc un arbre. Soient e une arête quelconque de G qui n'appartient pas à F et C_e le cycle fondamental de $F + e$. Par définition, e est la seule arête de C_e qui n'appartient pas à F et donc par (b), c'est une arête de C_e de coût maximum.

(c) implique (a) : Soient f une arête quelconque de F et Q_f la coupe fondamentale de G associée à $F - f$. On rappelle que f est la seule arête de F qui appartient à Q_f . Supposons que $Q_f \neq \{f\}$. Soient e une arête quelconque de Q_f distincte de f et C_e le cycle fondamental de $F + e$. On remarque que C_e existe car e n'est pas dans F et que toutes les arêtes de C_e différentes de e sont dans F . Puisque e appartient à la fois à C_e et à Q_f , par l'Exercice 45, il existe une arête qui appartient à la fois à $C_e - e$ et Q_f , donc à F et Q_f , donc c'est l'arête f . Ainsi on a obtenu que l'arête f est dans C_e et par (c), on a $c(e) \geq c(f)$. Puisque cette inégalité est valable pour toutes les arêtes e de Q_f , f est une arête de coût minimum dans Q_f . On a donc démontré que la condition (c) de l'Exercice 107 est vérifiée, et alors par l'Exercice 107, F est un arbre couvrant de G de coût minimum. \square

Remarque 41 En interchangeant minimum et maximum dans les trois conditions de l'énoncé de l'Exercice 107 ou 108, les trois nouvelles conditions sont toujours équivalentes.

Exercice 109 Soient F un graphe partiel d'un graphe G et c une fonction de coût sur les arêtes de G . Montrer que F est un arbre couvrant de G de coût minimum si et seulement si il existe une exécution de l'algorithme de Kruskal qui construit F .

Solution Montrons d'abord que la condition est nécessaire. Soit donc F un arbre couvrant de G de coût minimum.

Le seul choix que l'on puisse faire lors de l'exécution de l'algorithme de Kruskal concerne l'ordre attribué aux arêtes de même coût à l'étape 0. Soient $c_1 < c_2 < \dots < c_k$ les différentes valeurs des coûts des arêtes de G et E_i l'ensemble des arêtes de G de coût égal à c_i ($1 \leq i \leq k$). Il existe une exécution de l'étape 0 pour laquelle l'ordre e_1, \dots, e_m obtenu est tel que pour chaque $i = 1, \dots, k$, les arêtes de $E_i \cap E(F)$ sont placées avant celles de $E_i \setminus E(F)$.

Soient f une arête quelconque de F et Q_f la coupe fondamentale de G associée à $F - f$. Puisque F est un arbre couvrant de G de coût minimum, par l'Exercice 107, f est une arête de coût minimum dans Q_f et de plus elle est la seule arête de F qui appartient à Q_f . Par

la construction de l'ordre, f est donc l'arête d'indice minimum dans Q_f . Par l'Exercice 105, l'algorithme de Kruskal basé sur cet ordre construira F .

Montrons maintenant que la condition est suffisante. Supposons qu'il existe une exécution de l'algorithme de Kruskal qui construit F . D'après l'Exercice 106, F est un arbre couvrant de G de coût minimum. \square

Exercice 110 Soient F un arbre couvrant d'un graphe G et c une fonction de coût sur les arêtes de G . On suppose que pour toute arête f de F , il existe une coupe de G dont f est une arête de coût minimum. Peut-on en conclure que F est un arbre couvrant de G de coût minimum ?

Solution La réponse est non, comme le montre l'exemple suivant. Soient G le graphe complet à 3 sommets dont deux arêtes sont de coût 2 et la troisième de coût 1, et F l'arbre couvrant de G constitué des deux arêtes de coût 2. La condition est satisfaite puisque ces deux arêtes forment une coupe dans laquelle elles sont de coût minimum. En remplaçant une des arêtes de F par l'arête de coût 1, on obtient un arbre couvrant de G de coût inférieur à celui de F , donc F n'est pas de coût minimum. \square

ALGORITHME DE PRIM :

ENTRÉE : Un graphe connexe $G = (V, E)$ et une fonction de coût c sur E .

SORTIE : Un arbre couvrant F de G de coût minimum.

Etape 1 : *Initialisation.*
 Choisir $v_1 \in V$, $V_1 := \{v_1\}$, $E_0 := \emptyset$, $n := |V|$.

Etape 2 : *Construction de l'arbre.*
 Pour $i = 1$ à $n - 1$ faire :
 choisir $e_i \in \delta_G(V_i)$ de coût minimum,
 $v_{i+1} :=$ l'extrémité de e_i dans $V \setminus V_i$,
 $V_{i+1} := V_i \cup \{v_{i+1}\}$.
 $E_i := E_{i-1} \cup \{e_i\}$.

Etape 3 : *Fin de l'algorithme.*
 $F := (V, E_{n-1})$,
 STOP.

FIGURE 1.74 – Algorithme de Prim

Exercice 111 Exécuter l'algorithme de Prim (FIG. 1.74) sur le graphe de la FIG. 1.71.

Solution A l'Etape 1, on peut choisir le sommet le plus haut à gauche dans la FIG. 1.71 comme sommet v_1 . A l'Etape 2, la construction de l'arbre est illustrée dans la FIG. 1.75. A l'Etape 3, le coût de l'arbre couvrant obtenu est égal à 20. \square

Exercice 112 (Justification de l'algorithme de Prim (FIG. 1.74))

- (a) Montrer qu'à la i -ième itération de l'Etape 2, l'arête e_i existe pour $1 \leq i \leq n - 1$.
- (b) Montrer que (V_{i+1}, E_i) est un arbre pour $0 \leq i \leq n - 1$.
- (c) Montrer que $E_i \in \mathcal{F}_{(G,c)}$ pour $0 \leq i \leq n - 1$.
- (d) En déduire que F fourni par l'algorithme de Prim est un arbre couvrant de G de coût minimum.

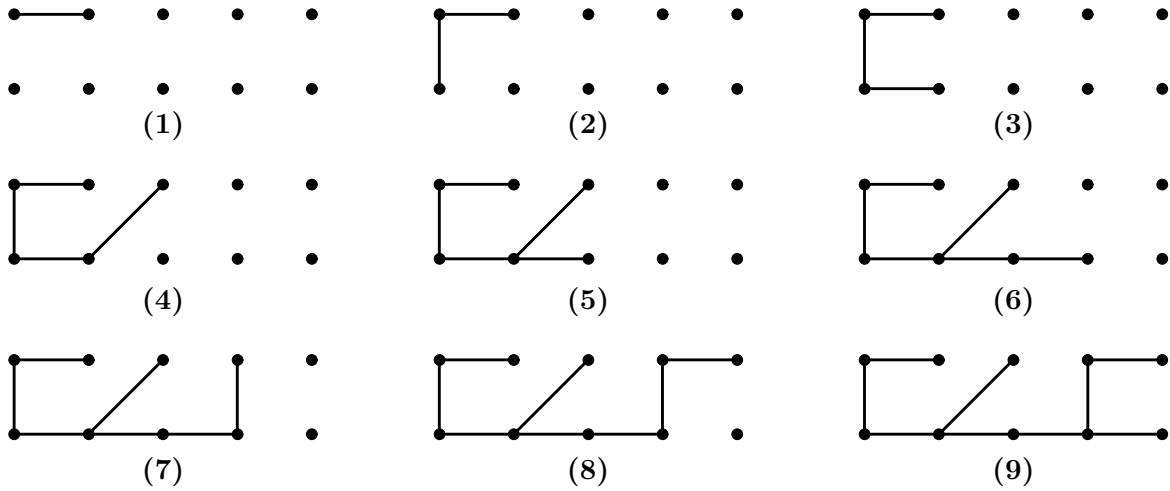


FIGURE 1.75 – Déroulement de l'Etape 2 de l'algorithme de Prim

Solution (a) Puisque G est connexe et $\emptyset \neq V_i \neq V$, par l'Exercice 28, $\delta_G(V_i) \neq \emptyset$, et donc e_i existe.

(b) On va procéder par récurrence sur i ($0 \leq i \leq n - 1$). Pour $i = 0$, $E_0 = \emptyset$, et $(\{v_1\}, \emptyset)$ est un arbre. Supposons maintenant que la propriété est vraie pour $i - 1 \geq 0$, c'est-à-dire que (V_i, E_{i-1}) est un arbre. Puisque (V_{i+1}, E_i) est obtenu à partir de (V_i, E_{i-1}) en ajoutant le sommet v_{i+1} et l'arête e_i entre v_{i+1} et V_i , par l'Exercice 83, (V_{i+1}, E_i) est un arbre; la propriété est vraie pour i .

(c) On va procéder par récurrence sur i ($0 \leq i \leq n - 1$). Pour $i = 0$, $E_0 = \emptyset \in \mathcal{F}_{(G,c)}$. Supposons maintenant que la propriété est vraie pour $i - 1 \geq 0$, c'est-à-dire que $E_{i-1} \in \mathcal{F}_{(G,c)}$. Par (b) pour $i - 1$, $E_{i-1} \cap \delta_G(V_i) = \emptyset$, de plus e_i est une arête de $\delta_G(V_i)$ de coût minimum, et donc, par l'Exercice 102, on a $E_i = E_{i-1} \cup \{e_i\} \in \mathcal{F}_{(G,c)}$; la propriété est vraie pour i .

(d) Par (b) et (c) pour $i = n - 1$, F est un arbre couvrant de G de coût minimum. \square

ALGORITHME GROUTON PESSIMISTE :

ENTRÉE : Un graphe connexe G et une fonction de coût c sur les arêtes de G .

SORTIE : Un arbre couvrant F de G de coût minimum.

Etape 0 : *Prétraitement des données.*

Trier les arêtes de G par ordre de coût non-croissant : $c(e_1) \geq c(e_2) \geq \dots \geq c(e_m)$.

Etape 1 : *Initialisation.*

$F_0 := G$.

Etape 2 : *Construction de l'arbre.*

Pour $i = 1$ à m faire :

si $F_{i-1} - e_i$ est connexe, alors $F_i := F_{i-1} - e_i$,

sinon $F_i := F_{i-1}$.

Etape 3 : *Fin de l'algorithme.*

$F := F_m$,

STOP.

FIGURE 1.76 – Algorithme glouton pessimiste

Exercice 113 Exécuter l'algorithme glouton pessimiste (FIG. 1.76) sur le graphe de la FIG. 1.71.

Solution A l'Etape 0 de l'algorithme glouton pessimiste, on peut choisir l'ordre des arêtes représenté sur la FIG. 1.77. (On remarque que d'autres choix seraient possibles.)

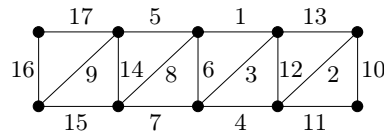


FIGURE 1.77 – Un ordre par coût non-croissant des arêtes du graphe de la FIG. 1.71.

L'étape de construction de l'arbre est illustrée dans la FIG. 1.78. (On n'a représenté que les itérations où une arête a été supprimée.)

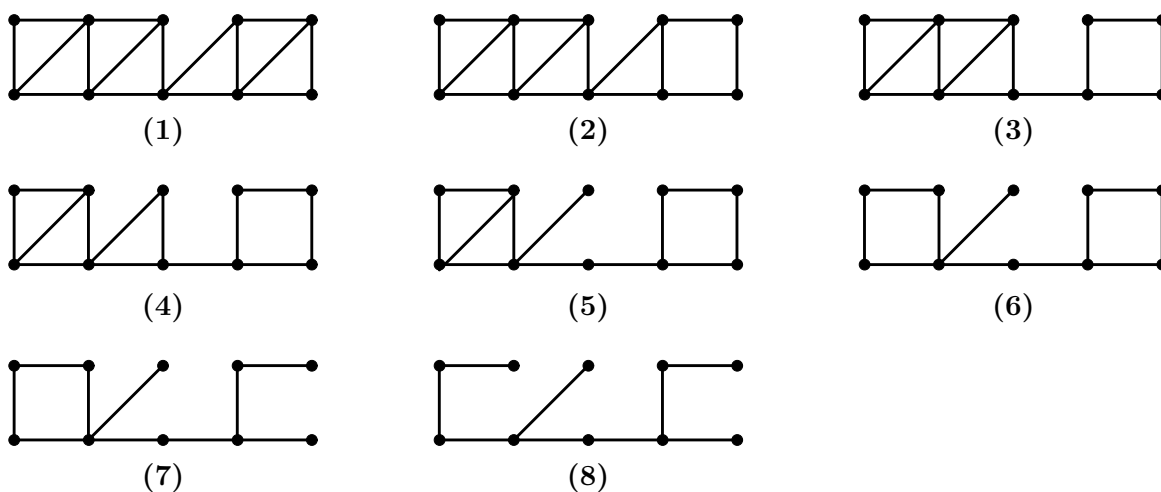


FIGURE 1.78 – Déroulement de l'Etape 2 de l'algorithme glouton pessimiste basé sur l'ordre de la FIG. 1.77.

Le coût de l'arbre couvrant obtenu est égal à 20. □

Exercice 114 (Justification de l'algorithme glouton pessimiste (FIG. 1.76))

Montrer que F construit par l'algorithme glouton pessimiste est un arbre couvrant de G de coût minimum.

Solution L'algorithme glouton pessimiste construit un graphe F à partir de G en supprimant des arêtes. On remarque que, d'après l'Exercice 31, pour chaque cycle C de G , l'arête de C , qui est la première dans l'ordre calculé à l'Etape 0, est supprimée à l'Etape 2 de l'algorithme. Il en résulte que F est sans cycle. Par le principe de construction, F contient tous les sommets de G et est connexe, c'est donc un arbre couvrant de G . Notre remarque implique de plus que toute arête e de G qui n'est pas dans F est une arête de coût maximum dans le cycle fondamental de $F + e$. Par l'Exercice 108, F est un arbre couvrant de G de coût minimum. □

Exercice 115 (Justification de l'algorithme glouton optimiste général (FIG. 1.79))

Montrer que le graphe F construit par l'algorithme glouton optimiste général vérifie les propriétés suivantes.

ALGORITHME GROUTON OPTIMISTE GÉNÉRAL :

ENTRÉE : Un graphe connexe G et une fonction de coût c sur les arêtes de G .

SORTIE : Un arbre couvrant F de G de coût minimum.

Etape 0 : *Prétraitement des données.*
Prendre un ordre quelconque des arêtes de G : e_1, e_2, \dots, e_m .

Etape 1 : *Initialisation.*
 $F_0 := (V, \emptyset)$.

Etape 2 : *Construction de l'arbre.*
Pour $i = 1$ à m faire :
 s'il existe un cycle C_i dans $F_{i-1} + e_i$, alors
 soit e_i^* une arête de coût maximum de C_i ,
 $F_i := F_{i-1} + e_i - e_i^*$,
 sinon $F_i := F_{i-1} + e_i$.

Etape 3 : *Fin de l'algorithme.*
 $F := F_m$,
STOP.

FIGURE 1.79 – Algorithme glouton optimiste général

- (a) F est sans cycle,
- (b) F contient une arête de coût minimum de chaque coupe de G ,
- (c) F est un arbre couvrant de G de coût minimum.

Solution (a) On montre par récurrence que F_i pour $i = 0, 1, \dots, m$ est sans cycle. Pour $i = 0$, cette propriété est bien vérifiée, en effet F_0 défini à l'Etape 1 n'a aucune arête. Supposons que F_{i-1} soit sans cycle, montrons que F_i l'est aussi.

Si $F_{i-1} + e_i$ ne contient pas de cycle, alors F_i qui lui est égal, non plus.

S'il existe un cycle C_i dans $F_{i-1} + e_i$, alors e_i relie deux sommets distincts d'une composante connexe K de F_{i-1} . Puisque F_{i-1} est sans cycle, K est un arbre et alors par la Remarque 27, C_i est l'unique cycle de $K + e_i$, et donc de $F_{i-1} + e_i$, et ainsi en supprimant e_i^* qui est dans C_i , on obtient un graphe F_i sans cycle.

(b) Supposons par l'absurde que cette propriété n'est pas vérifiée. Soit donc Q une coupe de G dont F ne contient aucune arête de coût minimum. On remarque que, au cours de l'algorithme, pour $i = 1, \dots, m$, l'arête e_i est rajoutée à F_{i-1} et qu'elle est éventuellement supprimée d'un certain F_j pour $j \geq i - 1$. Nous avons donc supposé que toutes les arêtes de coût minimum de Q ont été supprimées. Soit j le plus grand indice tel que $F_j = F_{j-1} + e_j - e_j^*$ où e_j^* est une arête de coût minimum de Q . Dans ce cas e_j^* appartient au cycle C_j de $F_{j-1} + e_j$. Par l'Exercice 45, Q contient une arête e_k différente de e_j^* appartenant à C_j et donc à F_j . Puisque e_j^* est de coût maximum dans C_j et de coût minimum dans Q , on a $c(e_k) \leq c(e_j^*) \leq c(e_k)$ et donc e_k est de coût minimum dans Q . Par la définition de Q , e_k n'est pas dans F , c'est-à-dire qu'elle a été supprimée et donc il existe un indice $l > j$ tel que $e_k = e_l^*$ ce qui contredit notre hypothèse sur j .

(c) Par (a), (b) et l'Exercice 107, F est un arbre couvrant de G de coût minimum. □

Exercice 116 (Justification de l'algorithme glouton pessimiste général (FIG. 1.80))

Montrer que le graphe F construit par l'algorithme glouton pessimiste général vérifie les propriétés suivantes.

- (a) F est connexe,

ALGORITHME GROUTON PESSIMISTE GÉNÉRAL :

ENTRÉE : Un graphe connexe G et une fonction de coût c sur les arêtes de G .

SORTIE : Un arbre couvrant F de G de coût minimum.

Etape 0 : *Prétraitement des données.*
Prendre un ordre quelconque des arêtes de G : e_1, e_2, \dots, e_m .

Etape 1 : *Initialisation.*
 $F_0 := G$.

Etape 2 : *Construction de l'arbre.*
Pour $i = 1$ à m faire :
 s'il existe une coupe Q_i de G disjointe de $F_{i-1} - e_i$, alors
 soit e_i^* une arête de coût minimum de Q_i ,
 $F_i := F_{i-1} - e_i + e_i^*$,
 sinon $F_i := F_{i-1} - e_i$,

Etape 3 : *Fin de l'algorithme.*
 $F := F_m$,
STOP.

FIGURE 1.80 – Algorithme glouton pessimiste général

- (b) pour tout cycle C de G , il existe une arête de coût maximum dans C qui n'appartient pas à F ,
- (c) F est un arbre couvrant de G de coût minimum.

Solution (a) On montre par récurrence que F_i pour $i = 0, 1, \dots, m$ est connexe. Pour $i = 0$, cette propriété est bien vérifiée, en effet F_0 défini à l'Etape 1 est égal à G qui est connexe. Supposons que F_{i-1} soit connexe et montrons que F_i est connexe lui aussi.

S'il existe une coupe Q_i de G disjointe de $F_{i-1} - e_i$, alors puisque F_{i-1} est connexe, par la Remarque 12, $F_{i-1} - e_i$ a deux composantes connexes et Q_i est égal à l'ensemble des arêtes de G entre ces deux composantes connexes. Puisque e_i^* est une arête de Q_i , par la Remarque 12, F_i qui est obtenu à partir de $F_{i-1} - e_i$ en rajoutant e_i^* est connexe.

S'il n'existe pas de coupe de G disjointe de $F_{i-1} - e_i$, alors par l'Exercice 28, F_i qui est égal à $F_{i-1} - e_i$, est connexe.

(b) Supposons par l'absurde que cette propriété n'est pas vérifiée. Soit donc C un cycle de G dont F contient toutes les arêtes de coût maximum. On remarque que, au cours de l'algorithme, pour $i = 1, \dots, m$, l'arête e_i est supprimée de F_{i-1} et qu'elle est éventuellement rajoutée à un certain F_j pour $j \geq i - 1$. Nous avons donc supposé que toutes les arêtes de coût maximum de C ont été rajoutées. Soit j le plus grand indice tel que $F_j = F_{j-1} - e_j + e_j^*$ où e_j^* est une arête de coût maximum de C . Dans ce cas e_j^* appartient à la coupe Q_j de G disjointe de $F_{j-1} - e_j$. Par l'Exercice 45, C contient une arête e_k différente de e_j^* appartenant à Q_j et donc pas à F_j . Puisque e_j^* est de coût maximum dans C et de coût minimum dans Q_j , on a $c(e_k) \leq c(e_j^*) \leq c(e_k)$ et donc e_k est de coût maximum dans C . Par la définition de C , e_k est dans F , c'est-à-dire qu'elle a été rajoutée et donc il existe un indice $l > j$ tel que $e_k = e_l^*$ ce qui contredit notre hypothèse sur j .

(c) Par (a), (b), et l'Exercice 108, F est un arbre couvrant de G de coût minimum. \square

Exercice 117 Soient F une forêt d'un graphe connexe G et c une fonction de coût sur les arêtes de G . Proposer un algorithme qui trouve, parmi les arbres couvrants de G contenant les arêtes de F , un arbre de coût minimum.

Solution Par la Remarque 35, on peut supposer que $c(e) > 0$ pour toute arête e de G . On pose

$$c'(e) := \begin{cases} 0 & \text{si } e \in E(F), \\ c(e) & \text{si } e \in E(G) \setminus E(F). \end{cases}$$

On exécute l'algorithme de Kruskal sur G muni de la fonction de coût c' ; et soit T l'arbre couvrant de G ainsi obtenu. Puisque F est une forêt dont les arêtes sont de c' -coût nul et que les autres arêtes de G sont de c' -coûts strictement positifs, toutes les arêtes de F appartiennent à T . Il reste à montrer que si T' est un arbre couvrant quelconque de G contenant les arêtes de F , alors $c(T) \leq c(T')$. Par la définition de c' , pour tout sous-ensemble E' d'arêtes de G contenant les arêtes de F , on a

$$c'(E') = c(E') - c(F). \quad (1.6)$$

Par l'Exercice 106, T est un arbre couvrant de G de c' -coût minimum, on a donc

$$c'(T) \leq c'(T')$$

et ainsi par (1.6),

$$\begin{aligned} c(T) &= c'(T) + c(F) \\ &\leq c'(T') + c(F) \\ &= c(T'), \end{aligned}$$

ce qu'on a voulu démontrer. □

Exercice 118 Soient G un graphe connexe, F un arbre couvrant de G et c une fonction de coût sur les arêtes de G . Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) F est un arbre couvrant de G de coût maximum,
- (b) pour chaque paire u, v de sommets de G , l'unique chaîne de F entre u et v est une (u, v) -chaîne de capacité maximum dans G .

Solution (a) implique (b) : Soient G un graphe connexe et c une fonction de coût sur les arêtes de G (FIG. 1.81 (a)). Supposons que F un arbre couvrant de G de coût maximum (FIG. 1.81 (b)). Nous allons montrer que F vérifie (b). Soient u et v deux sommets de G , P l'unique chaîne de F entre u et v , et e une arête de P dont le coût est égal à la capacité de P (FIG. 1.81 (c)). Soit $\delta_G(X)$ la coupe fondamentale de G associée à $F - e$ (FIG. 1.81 (d)). Remarquons que X contient exactement un des deux sommets u et v .

Considérons maintenant une (u, v) -chaîne quelconque P' de G (FIG. 1.81 (e)). Par l'Exercice 20, il existe une arête f de P' qui est dans $\delta_G(X)$ (FIG. 1.81 (f)). D'après la Remarque 41 et l'Exercice 107, l'arête e est de coût maximum dans $\delta_G(X)$ et ainsi $c(f) \leq c(e)$. Puisque f est une arête de P' , la capacité de P' est inférieure ou égale à $c(f)$, et donc inférieure ou égale à $c(e)$ qui est la capacité de P . On en conclut que P est de capacité maximum parmi l'ensemble des (u, v) -chaînes de G .

(b) implique (a) : Soit uv une arête de G qui n'appartient pas à F . Soit P la chaîne de F entre u et v . Par (b), la capacité de P est supérieure ou égale à la capacité de la chaîne constituée de l'arête uv . Par conséquent, le coût de chaque arête de P est supérieur ou égal à $c(uv)$. Par l'Exercice 108, F est un arbre couvrant de G de coût maximum. □

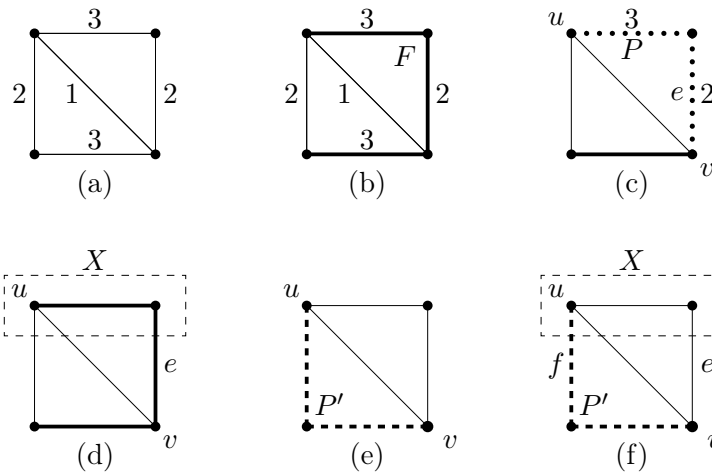


FIGURE 1.81 – (a) Le graphe G et les coûts de ses arêtes, (b) un arbre couvrant F de coût maximum, (c) la chaîne P de F entre u et v et l’arête e de P de coût minimum, (d) la coupe fondamentale $\delta_G(X)$ de G associée à $F - e$, (e) une (u, v) -chaîne P' de G , (f) l’arête f appartenant à P' et à $\delta_G(X)$.

Exercice 119 Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. Soit $r_G : V \times V \rightarrow \mathbb{N}$ la fonction symétrique définie par

$$r_G(u, v) = \min\{d_G(X) : X \subset V, u \in X, v \in V \setminus X\}.$$

- (a) Montrer qu’il existe un arbre $T = (V, F)$ et une fonction c de coût sur F tels que pour chaque paire u, v de sommets de T , l’unique chaîne de F entre u et v soit de capacité égale à $r_G(u, v)$.
- (b) En déduire que la fonction r_G prend au plus $|V| - 1$ valeurs différentes.

Solution (a) Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe (FIG. 1.82 (a)). Remarquons que si un tel arbre T existe, alors, puisque la capacité d’une chaîne composée d’une seule arête est égale au coût de cette arête, on a pour chaque arête ab de T , $c(ab) = r_G(a, b)$. Par conséquent, on définit la fonction de coût c sur les arêtes du graphe complet $K_{|V|}$ sur V (FIG. 1.82 (b)) par

$$c(ab) = r_G(a, b) \text{ pour toute arête } ab \text{ de } K_{|V|}. \tag{1.7}$$

Soit $T = (V, F)$ un arbre couvrant de $K_{|V|}$ de coût maximum (FIG. 1.82 (c)). Nous allons montrer que T convient. Soient u et v deux sommets quelconques de T . Si l’arête $uv \in F$, alors par définition de c et par la remarque ci-dessus, la propriété est vérifiée. On suppose donc que $uv \notin F$.

Par définition de r_G , il existe un sous-ensemble X de V (FIG. 1.82 (d)) tel que $u \in X, v \in V \setminus X$ et

$$d_G(X) = r_G(u, v).$$

De plus, par (1.7),

$$r_G(u, v) = c(uv).$$

Soient P la chaîne unique de T entre u et v et e une arête de P dont le coût est égal à la capacité de P (FIG. 1.82 (e)). D’après la Remarque 41 et l’Exercice 108, uv est de coût minimum dans le cycle $P + uv$ et donc

$$c(uv) \leq c(e).$$

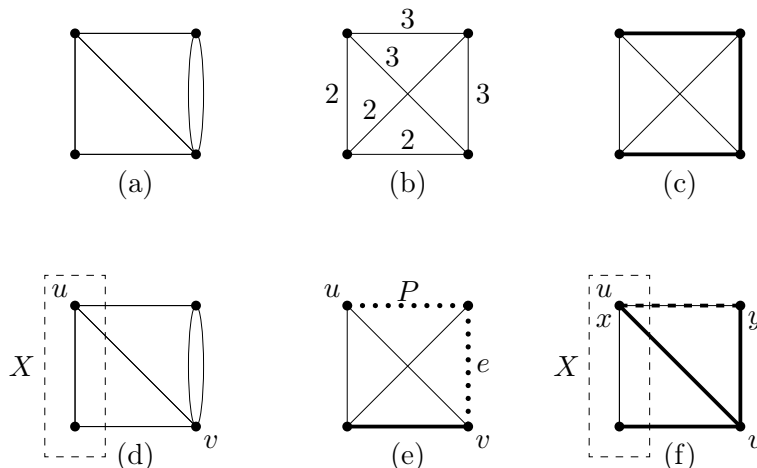


FIGURE 1.82 – (a) Le graphe G , (b) le graphe $K_{|V|}$ et les coûts de ses arêtes, (c) un arbre couvrant T de $K_{|V|}$ de coût maximum, (d) un ensemble X qui définit $r_G(u, v)$, (e) la chaîne P et une arête e de P de coût minimum, (f) l'arête xy .

Par l'Exercice 45, le cycle fondamental $P + uv$ de $T + uv$ contient une arête xy de la coupe $\delta_{T+uv}(X)$ telle que $x \in X, y \in V \setminus X$ et $xy \neq uv$ (FIG. 1.82 (f)). Puisque la capacité de P est $c(e)$ et xy est une arête de P , on a

$$c(e) \leq c(xy).$$

Or par (1.7),

$$c(xy) = r_G(x, y).$$

Enfin, par définition de r_G , on a

$$r_G(x, y) \leq d_G(X).$$

Le premier et le dernier terme de la concaténation des inégalités précédentes sont égaux ; ceci implique qu'on a égalité partout, en particulier la valeur $r_G(u, v)$ est égale à la capacité $c(e)$ de P .

(b) Par (a), il existe un arbre $T = (V, F)$ et une fonction c de coût sur F tels que pour chaque paire u, v de sommets de T , l'unique chaîne de T entre u et v soit de capacité égale à $r_G(u, v)$. Or par définition, la capacité d'une chaîne de T est égale au coût d'une de ses arêtes. Puisque par l'Exercice 84, le nombre d'arêtes de T est égal à $|V| - 1$, la fonction r prend au plus $|V| - 1$ valeurs différentes. □

Exercice 120 On considère le graphe G avec fonction de coût sur les arêtes indiqué sur la FIG. 1.83.

- (a) Exécuter l'algorithme de Kruskal pour trouver un arbre couvrant de G de coût minimum.
- (b) Montrer qu'aucun arbre couvrant de G de coût minimum ne contient l'arête e indiquée sur la FIG. 1.83.
- (c) Déterminer un arbre couvrant de G contenant e qui soit de coût minimum.
- (d) De quelle valeur minimum doit-on diminuer le coût de l'arête e pour qu'il existe un arbre couvrant de G de coût minimum qui contienne e ?

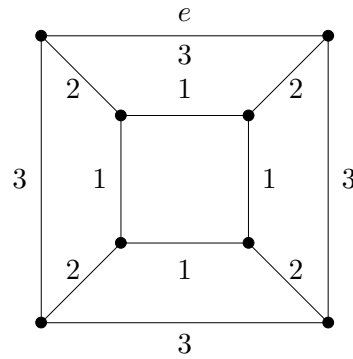


FIGURE 1.83 – Graphe, fonction de coût sur les arêtes et l’arête e .

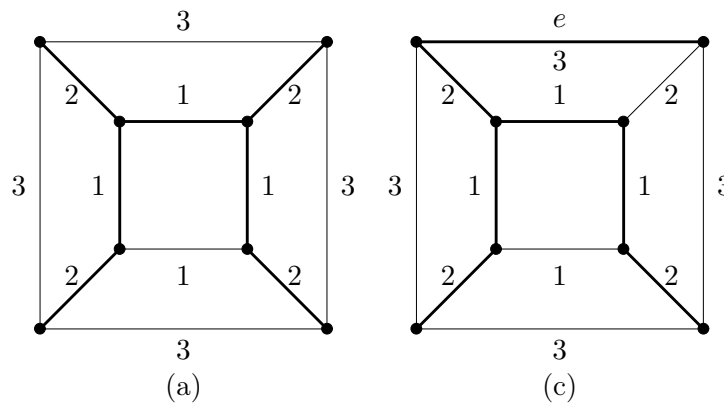


FIGURE 1.84 – (a) Un arbre couvrant de G de coût minimum, (c) un arbre couvrant contenant e de coût minimum.

Solution (a) En exécutant l’algorithme de Kruskal on peut trouver l’arbre couvrant de G de coût 11 indiqué sur la FIG. 1.84(a). (On remarque qu’il existe d’autres arbres couvrants de G de même coût.)

(b) Nous présentons trois démonstrations différentes.

Première démonstration : Supposons par l’absurde qu’il existe un arbre couvrant F de G de coût minimum qui contient l’arête e . D’après (a), $c(F) = 11$ et comme $c(e) = 3$, la somme des coûts des arêtes de $F - e$ est 8. Par l’Exercice 84, $F - e$ a 6 arêtes. Puisque les coûts sont 1, 2 ou 3 et qu’il y a quatre arêtes de coût 1, la seule possibilité est que $F - e$ ait ces quatre arêtes (et deux de coût 2), mais c’est une contradiction car celles-ci forment un cycle.

Deuxième démonstration : Puisque les arêtes de G de coûts 1 ou 2 forment un graphe partiel de G connexe, toute exécution de l’algorithme de Kruskal construira un arbre couvrant de G constitué uniquement de telles arêtes. Par l’Exercice 107, les arêtes de coût 3, en particulier l’arête e , ne sont donc dans aucun arbre couvrant de G de coût minimum.

Troisième démonstration : Considérons le cycle C de longueur 4 et de coût 8 qui contient l’arête e . (C’est le carré supérieur dans la FIG. 1.83.) Dans ce cycle l’arête e est l’unique arête de coût maximum. Par l’Exercice 45, chaque coupe de G contenant e contient une autre arête de C . En conclusion il n’existe pas de coupe de G dont e est une arête de coût minimum. D’après l’Exercice 103, aucun arbre couvrant de G de coût minimum ne contient l’arête e .

(c) Par la réponse à la question (a), le coût minimum d'un arbre couvrant de G est 11. Par (b), il n'y a pas d'arbre couvrant de G contenant e de coût 11. Or les coûts des arêtes sont entiers, et donc l'arbre de la FIG. 1.84(c), qui est de coût 12, est bien de coût minimum parmi les arbres couvrants de G contenant e .

(d) En diminuant de ε le coût de l'arête e , on diminue de ε le coût des arbres couvrants de G contenant e et on ne modifie pas celui des arbres couvrants de G ne contenant pas e . Par les réponses aux questions (a) et (c), le coût minimum d'un arbre couvrant de G est 11 et celui d'un arbre couvrant de G contenant e est 12. Par conséquent, la valeur minimum dont il faut diminuer le coût de l'arête e est égale à 1. \square

Soient $G = (V, E)$ un graphe, S un sous-ensemble non-vide de V . Un **S-connecteur** de G est un graphe partiel de G dans lequel, pour tout sommet v , il existe un sommet de S relié par une chaîne à v . Une **S-forêt** de G est un graphe partiel de G qui est une forêt dont chaque composante connexe contient exactement un sommet de S .

Remarque 42 *Un graphe partiel de G est un S -connecteur de G si et seulement si chacune de ses composantes connexes contient au moins un sommet de S . Par conséquent, dans G , une S -forêt est un S -connecteur.*

Exercice 121 *Soient $G = (V, E)$ un graphe connexe, c une fonction de coût strictement positive sur les arêtes de G et S un sous-ensemble non-vide de sommets de G . Le but de l'exercice est de trouver un S -connecteur de G de c -coût minimum.*

- (a) *Montrer qu'un S -connecteur de G contient une S -forêt de G .*
- (b) *Soit F un sous-ensemble d'arêtes de G . Montrer que $G(F)$ est un S -connecteur de G de c -coût minimum si et seulement si $G(F)$ est une S -forêt de G de c -coût minimum.*

Soit G' le graphe obtenu à partir de G en rajoutant un nouveau sommet z et un ensemble Z de nouvelles arêtes sz pour tout sommet $s \in S$. On définit la fonction de coût c' sur les arêtes de G' qui conserve les coûts des arêtes de G et qui attribue un coût nul aux nouvelles arêtes.

- (c) *Montrer que l'ensemble des arêtes d'un arbre couvrant de G' de c' -coût minimum est égal à la réunion de Z et de l'ensemble des arêtes d'une S -forêt de G .*
- (d) *Soit F' un sous-ensemble d'arêtes de G' . Montrer que $G'(F')$ est un arbre couvrant de G' de c' -coût minimum si et seulement si F' est égal à la réunion de Z et de l'ensemble des arêtes d'une S -forêt de G de c -coût minimum.*
- (e) *En conclure que si $G'(F')$ est un arbre couvrant de G' de c' -coût minimum alors $G(F' \setminus Z)$ est un S -connecteur de G de c -coût minimum.*
- (f) *Trouver un S -connecteur de G de c -coût minimum pour l'exemple de la FIG. 2.48.*

Solution (a) Soit $G(F)$ un S -connecteur de G . On peut choisir $F' \subseteq F$ qui induit un S -connecteur minimal de G , c'est-à-dire qu'aucun sous-ensemble propre de F' n'induit un S -connecteur de G . On va montrer que $G(F')$ est une S -forêt de G .

Si $G(F')$ contenait un cycle C , alors par l'Exercice 31, en supprimant une arête quelconque e de C , les ensembles de sommets des composantes connexes de $G(F' \setminus \{e\})$ resteraient inchangés et donc $G(F' \setminus \{e\})$ serait un S -connecteur de G , ce qui est une contradiction. Par conséquent, $G(F')$ est une forêt.

Puisque $G(F')$ est un S -connecteur de G , chaque composante connexe de $G(F')$ contient au moins un sommet de S . Supposons qu'il en existe une, notée K , contenant deux sommets s et s'

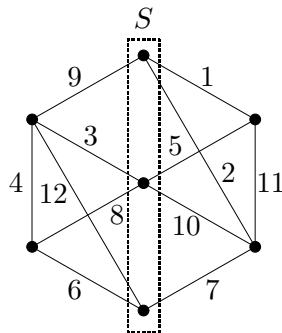


FIGURE 1.85 – Le graphe G , les coûts de ses arêtes et l'ensemble de sommets S .

de S . Soit e une arête appartenant à la chaîne reliant s et s' dans K . Puisque K est un arbre, par la Remarque 30, $K - e$ est une forêt ayant deux composantes connexes K_1 et K_2 . De plus, une des deux contient s et l'autre s' car en enlevant l'arête e on a détruit la seule chaîne entre s et s' . Or les composantes connexes de $G(F' \setminus \{e\})$ sont les mêmes que celles de $G(F')$ à l'exception de K qui est remplacée par K_1 et K_2 , et donc $G(F' \setminus \{e\})$ est un S -connecteur de G , ce qui est une contradiction. Par conséquent, $G(F')$ est bien une S -forêt de G .

(b) Soient $G(F_1)$ un S -connecteur de G de c -coût minimum et $G(F_2)$ une S -forêt de G de c -coût minimum. Par la Remarque 42, $G(F_2)$ est un S -connecteur de G , et ainsi, puisque $G(F_1)$ est de c -coût minimum, on a

$$c(F_1) \leq c(F_2).$$

Par (a), $G(F_1)$ contient une S -forêt $G(F_3)$ de G , et ainsi, puisque $G(F_2)$ est de c -coût minimum, on a

$$c(F_2) \leq c(F_3).$$

Puisque les c -coûts sont strictement positifs et que $F_3 \subseteq F_1$, les deux inégalités précédentes impliquent que $F_3 = F_1$ et donc que $c(F_1) = c(F_2)$. Par conséquent, le c -coût minimum d'un S -connecteur de G est égal au c -coût minimum d'une S -forêt de G . En conclusion, $G(F_1) = G(F_3)$ est une S -forêt de G de c -coût minimum et $G(F_2)$ est un S -connecteur de G de c -coût minimum, ce qui donne les conditions respectivement nécessaire et suffisante de (b).

(c) Soit $G'(F')$ un arbre couvrant de G' de c' -coût minimum. Par l'Exercice 109, il existe une exécution de l'algorithme de Kruskal qui construit l'arbre couvrant $G'(F')$ de G' . Puisque, dans G' , les arêtes de G sont de c' -coût strictement positif et celles dans Z sont de c' -coût nul, à l'étape de pré-traitement des données de l'algorithme de Kruskal, les arêtes de Z seront placées avant toutes les autres. Or $G'(Z)$ est une forêt et donc à l'étape de la construction de l'arbre, toutes les arêtes de Z seront ajoutées, autrement dit $Z \subseteq F'$.

En supprimant le sommet z de l'arbre $G'(F')$ on obtient une forêt $G'(F') - z = G(F' \setminus Z)$. Chaque composante connexe de cette forêt contient au moins un voisin de z dans G' , puisque $G'(F')$ est connexe, et au plus un, puisque $G'(F')$ est sans cycle, donc exactement un. Or l'ensemble des voisins de z dans G' est égal à S , et par conséquent, $G(F' \setminus Z)$ est une S -forêt de G ; ceci termine la démonstration de (c).

(d) Soient $G'(F')$ un arbre couvrant de G' de c' -coût minimum et $G(F)$ une S -forêt de G de c -coût minimum. Par (c), $G(F' \setminus Z)$ est une S -forêt de G . Puisque $G(F)$ est de c -coût minimum et que les arêtes de Z sont de c' -coût nul, on a

$$c(F) \leq c(F' \setminus Z) = c'(F').$$

Par ailleurs, puisque chaque composante connexe de $G(F)$ contient exactement un sommet de S et donc exactement un voisin de z dans G' , $G'(F \cup Z)$ est connexe et sans cycle, autrement dit c'est un arbre couvrant de G' . Puisque $G'(F')$ est de c' -coût minimum et que les arêtes de Z sont de c' -coût nul, on a

$$c'(F') \leq c'(F \cup Z) = c(F).$$

Par les deux inégalités précédentes, le c' -coût minimum d'un arbre couvrant de G' est égal au c -coût minimum d'une S -forêt de G .

En conclusion, F' est la réunion de Z et de l'ensemble des arêtes d'une S -forêt $G(F' \setminus Z)$ de G de c -coût minimum et $G'(F \cup Z)$ est un arbre couvrant de G' de c' -coût minimum, ce qui donne les conditions respectivement nécessaire et suffisante de (d).

(e) Soit $G'(F')$ un arbre couvrant de G' de c' -coût minimum. Par (d), $G(F' \setminus Z)$ est une S -forêt de G de c -coût minimum et par (b), $G(F' \setminus Z)$ est un S -connecteur de G de c -coût minimum.

(f) Par (e), il suffit de trouver un arbre couvrant de G' de c' -coût minimum pour le graphe auxiliaire G' défini dans l'énoncé. Un tel arbre peut se déterminer à l'aide de n'importe quel algorithme vu dans ce chapitre. La solution pour l'exemple de la FIG. 2.48 est indiquée sur la FIG. 2.49.

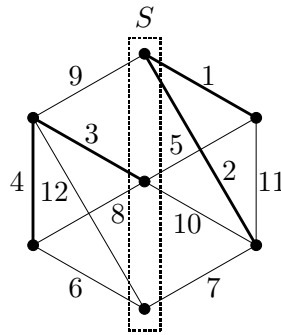


FIGURE 1.86 – Les arêtes en gras forment une solution optimale. □

Considérons la grille $m \times n$ comme un graphe : on appelle **graphe de grille de taille $m \times n$** (FIG. 1.87 (a)) le graphe dont les sommets sont tous les couples d'entiers (i, j) tels que $0 \leq i < n$ et $0 \leq j < m$ et où deux sommets (i, j) et (i', j') sont reliés si $|i - i'| + |j - j'| = 1$. Les arêtes uv où $u = (i, j)$ et $v = (i, j + 1)$ sont dites **verticales** (FIG. 1.87 (b)) et celles où $u = (i, j)$ et $v = (i + 1, j)$ sont dites **horizontales** (FIG. 1.87 (c)). Un sommet (i, j) est dit **de niveau j** . Une arête verticale qui relie un sommet de niveau j à un sommet de niveau $j - 1$ est dite **de type j** pour $j = 1, \dots, n - 1$ (FIG. 1.87 (d)).

Remarque 43 *Un graphe de grille est connexe.*

Exercice 122 *Soit (G, c) un réseau où G est le graphe de grille de taille $n \times n$ et le coût d'une arête est égal à 1 si elle est horizontale et à 2 si elle est verticale.*

- (a) *Quel est le nombre d'arêtes d'un arbre couvrant de G ?*
 (b) *Utiliser l'algorithme de Kruskal pour déterminer un arbre couvrant de G de coût minimum et donner son coût.*

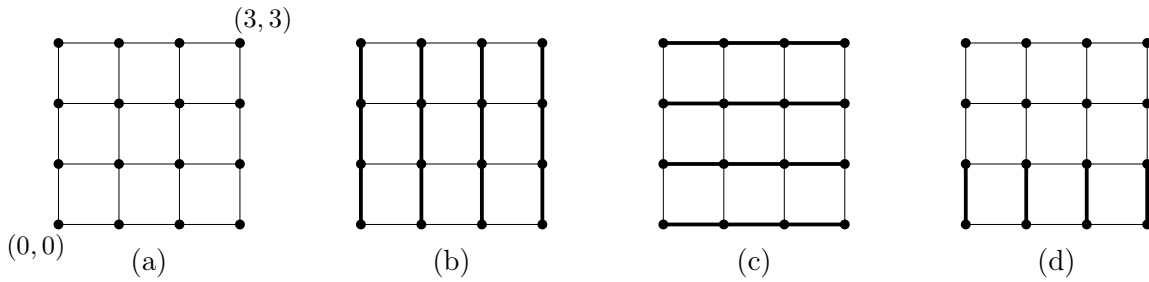


FIGURE 1.87 – (a) le graphe de grille de taille 4×4 , (b) les arêtes verticales, (c) les arêtes horizontales, (d) les arêtes verticales de type 1.

(c) *Quel est le nombre d'arbres couvrants de G de coût minimum ?*

Solution (a) Par la Remarque 43, G est connexe. Le graphe G a n^2 sommets, donc par l'Exercice 84, le nombre d'arêtes d'un arbre couvrant de G est égal à $n^2 - 1$.

(b) Les arêtes horizontales sont de coût minimum et elles seront donc classées en premier par l'étape de prétraitement de l'algorithme de Kruskal. Puisque le graphe partiel induit par ces arêtes ne contient aucun cycle, elles seront toutes ajoutées au cours de la construction de l'arbre. Les arêtes restantes, c'est-à-dire les arêtes verticales, sont toutes de coût 2. Lors de l'étape de prétraitement, elles seront donc placées dans un ordre quelconque à la suite des arêtes horizontales. Au cours de la construction de l'arbre, la première arête verticale de type j dans l'ordre sera ajoutée et les autres rejetées, pour $j = 1, \dots, n - 1$ (FIG. 1.88). En conséquence, le coût de l'arbre obtenu est égal à $n(n - 1) + 2(n - 1) = (n - 1)(n + 2)$.

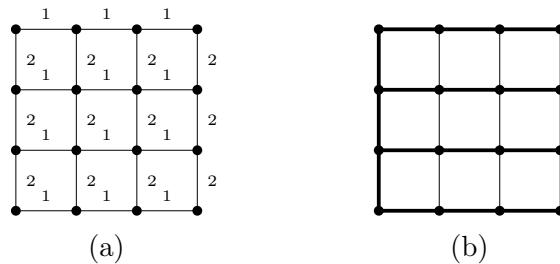


FIGURE 1.88 – (a) Coûts des arêtes, (b) Au cours de la construction de l'arbre, sont ajoutées toutes les arêtes horizontales et la première arête verticale de type j pour $j = 1, \dots, n - 1$.

(c) Par ce qui précède, tout arbre couvrant de G de coût minimum contient toutes les arêtes horizontales et exactement une arête verticale de type j et n'importe laquelle, pour $j = 1, \dots, n - 1$. Or pour un j fixé, il y a n arêtes de type j dans G , donc le nombre d'arbres couvrants de G de coût minimum est égal à n^{n-1} . □

Chapitre 2

Graphes orientés

Un **graphe orienté** G est constitué de deux ensembles : un ensemble fini et non-vide V , dont les éléments sont appelés **sommets**, et un ensemble fini A , dont les éléments sont appelés **arcs**. A chaque arc est associé un couple (ordonné) de sommets distincts de G . On note $G = (V, A)$. Généralement, étant donné un graphe orienté G , on notera $V(G)$ l'ensemble de ses sommets et $A(G)$ l'ensemble de ses arcs. Si le couple (u, v) est associé à l'arc e alors on dit que l'arc e **relie** (ou **connecte** ou **est orienté de**) u à v , l'**extrémité initiale** de e est u et l'**extrémité terminale** de e est v , on dira aussi que v est un **voisin sortant de** u ou **successeur de** u et que u est un **voisin entrant de** v ou **prédécesseur de** v . On appelle **arc entrant** (respectivement **sortant**) **de** u un arc dont u est l'extrémité terminale (respectivement initiale). Un arc dont l'extrémité initiale est égale à l'extrémité terminale est appelé **boucle**. Un arc e s'appelle **multiple** s'il existe un autre arc $e' \neq e$ ayant la même extrémité initiale et la même extrémité terminale que e , dans ce cas on dira aussi que e et e' sont **parallèles**. Un graphe orienté est dit **simple** si il est sans boucle et sans arc multiple. Dans le cas d'un graphe orienté sans arc multiple chaque arc e est caractérisé par son extrémité initiale u et son extrémité terminale v , on notera $e = uv$ qui est différent de vu .

On peut représenter un graphe orienté par un dessin : à chaque sommet est associé un point et chaque arc est représenté par une flèche orientée depuis son extrémité initiale vers son extrémité terminale. Voir l'exemple de la figure ci-dessous.

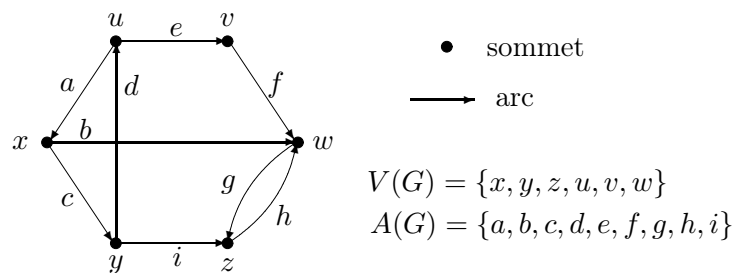


FIGURE 2.1 – Un graphe orienté G .

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté. On peut associer à G le graphe non-orienté obtenu en ignorant les orientations des arcs, plus précisément chaque arc de u à v est remplacé par une arête d'extrémités u et v . Toutes les notions non-orientées définies précédemment peuvent ainsi être utilisées pour les graphes orientés. L'opération d'**inversion de l'orientation d'un arc** de u à v consiste à remplacer cet arc par un arc de v à u .

Étant donné $X \subseteq V$, on appelle **sous-graphe de G induit par X** le graphe orienté $G[X] = (X, A')$ avec $A' = \{e = uv \in A : u \in X, v \in X\}$ (FIG. 2.2 (a)). Étant donné $F \subseteq A$, on appelle **graphe partiel de G induit par F** le graphe orienté $G(F) = (V, F)$ (FIG. 2.2 (b)). Un graphe partiel d'un sous-graphe de G est un **sous-graphe partiel de G** (FIG. 2.2 (c)).

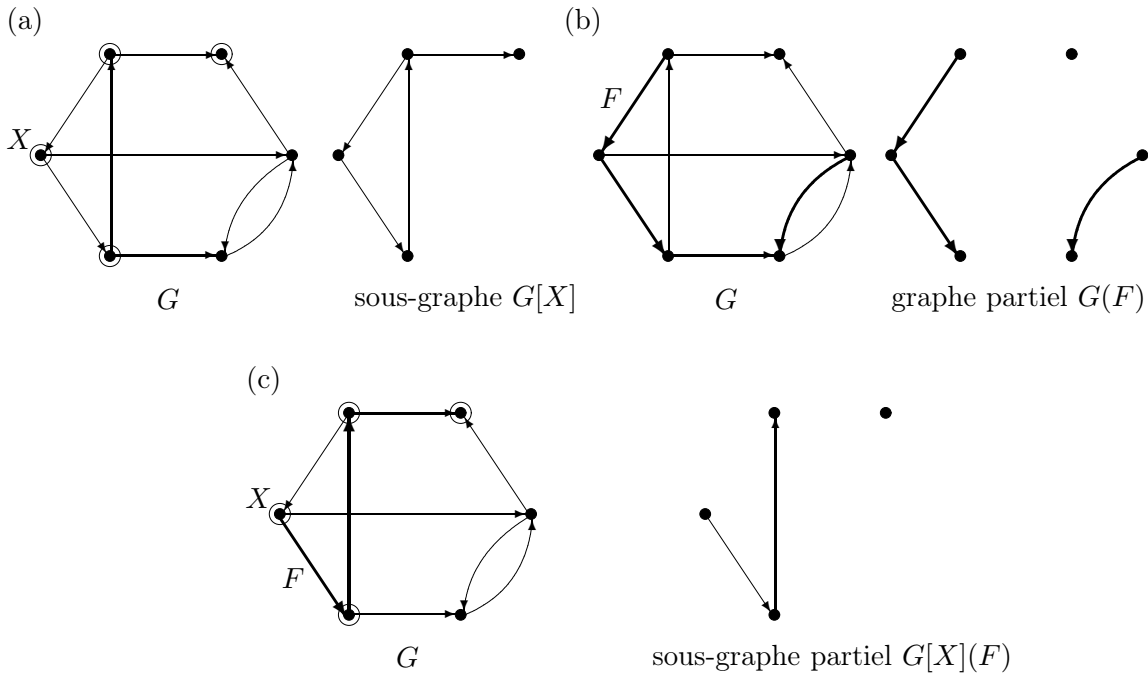


FIGURE 2.2 – (a) un sous-graphe, (b) un graphe partiel, (c) un sous-graphe partiel.

Pour un ensemble $S \subseteq V$, la **coupe sortante** définie par S est l'ensemble des arcs qui ont leur extrémité initiale dans S et leur extrémité terminale dans $V \setminus S$, on la note $\delta_G^+(S)$ ou $\delta^+(S)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté (FIG. 2.3) ; la **coupe entrante** définie par S est l'ensemble des arcs reliant un sommet de $V \setminus S$ à un sommet de S ; on la note $\delta_G^-(S)$ ou $\delta^-(S)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté. On remarque que $\delta^-(S) = \delta^+(V \setminus S)$ et que $\delta(S) = \delta^+(S) \cup \delta^-(S)$. On a

$$\begin{aligned} \delta^+(S) &= \{uv \in A : u \in S, v \in V \setminus S\}, \\ \delta^-(S) &= \{vu \in A : u \in S, v \in V \setminus S\}. \end{aligned}$$

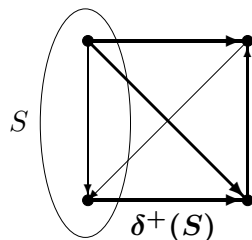


FIGURE 2.3 – Les arcs en gras représentent la coupe sortante définie par S .

Soit X un sous-ensemble de sommets de G , le graphe orienté obtenu à partir de G par **suppression de X** , noté $G - X$, est le graphe orienté $G[V \setminus X]$. Si $X = \{v\}$, alors on pourra écrire $G - v$ à la place de $G - \{v\}$. Le résultat de la **contraction de X** dans G est le graphe

orienté, noté \mathbf{G}/\mathbf{X} , obtenu à partir de G de la manière suivante : les sommets de X et les arcs dont les deux extrémités appartiennent à X sont supprimés, un nouveau sommet v_X est rajouté et pour chaque arc ayant une extrémité dans X , cette extrémité est remplacée par v_X (FIG. 2.4). Pour chaque sommet v de G , l'**image** de v dans G/X est v lui-même si v n'appartient pas à X et v_X sinon ; et, pour chaque arc e de u à v dans G , l'**image** de e dans G/X est un arc, également dénommé e , qui va de l'image de u à l'image de v . Remarquons que les sommets de G/X sont les images des sommets de G et les arcs de G/X sont les images des arcs de G dont au plus une extrémité est dans X .

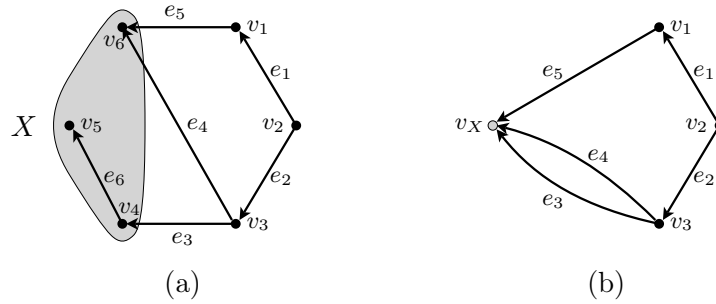


FIGURE 2.4 – (a) Un graphe orienté G et un ensemble de sommets X , (b) le graphe orienté contracté G/X .

Remarque 44 *Le graphe orienté contracté peut avoir des arcs multiples même si le graphe orienté initial n'en avait pas (FIG. 2.4).*

Remarque 45 *Le graphe orienté obtenu par contraction de deux ensembles disjoints ne dépend pas de l'ordre dans lequel ceux-ci ont été contractés (FIG. 2.5).*

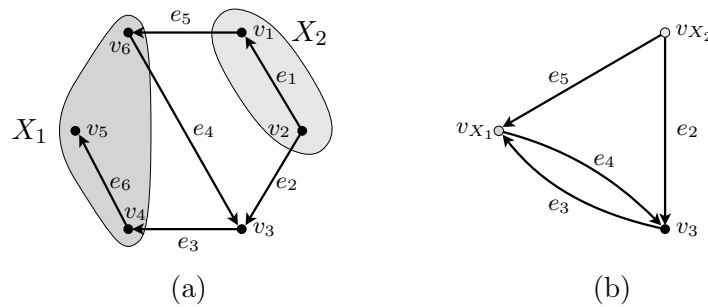


FIGURE 2.5 – (a) Un graphe orienté G et deux ensembles de sommets X_1 et X_2 , (b) le graphe orienté contracté $(G/X_1)/X_2 = (G/X_2)/X_1$.

Soit F un sous-ensemble d'arcs de G , on note $\mathbf{G} - \mathbf{F}$ le graphe orienté $G(A \setminus F)$. Si $F = \{a\}$, alors on pourra écrire $\mathbf{G} - \mathbf{a}$ à la place de $\mathbf{G} - \{a\}$. Soient u et v deux sommets de G , on note $\mathbf{G} + \mathbf{uv}$ le graphe orienté obtenu à partir de G en ajoutant un arc uv .

2.1 Degré

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté. Le nombre d'arcs sortants d'un sommet u est appelé **demi-degré extérieur** de u dans G , on le note $d_G^+(u)$ ou $d^+(u)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté,

on dira aussi **degré sortant**. Le nombre d'arcs entrants d'un sommet u est appelé **demi-degré intérieur** de u dans G , on le note $d_G^-(u)$ ou $d^-(u)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté, on dira aussi **degré entrant** (FIG. 2.6).

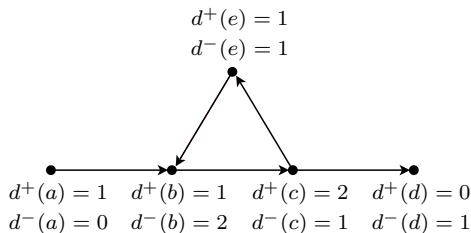


FIGURE 2.6 – Un graphe orienté G et les degrés sortant et entrant de chaque sommet de G .

Étant donné un sous-ensemble X de sommets de G , le **degré sortant** de X noté $d_G^+(X)$ (ou $d^+(X)$) est le nombre d'arcs de X à $V \setminus X$, autrement dit $d^+(X) = |\delta^+(X)|$. Le **degré entrant** de X noté $d_G^-(X)$ (ou $d^-(X)$) est le nombre d'arcs de $V \setminus X$ à X , autrement dit $d^-(X) = |\delta^-(X)|$ (FIG. 2.7(a)) Remarquons que si X contient un seul sommet u alors le degré sortant de X et le degré sortant de u sont égaux, c'est à dire $d^+(\{u\}) = d^+(u)$, de même $d^-(\{u\}) = d^-(u)$. L'ensemble des sommets de $V \setminus X$ qui ont au moins un prédécesseur dans X est appelé **voisinage sortant** de X et est noté $N_G^+(X)$; si $X = \{v\}$ alors on utilisera la notation $N_G^+(v)$ plutôt que $N_G^+(\{v\})$. Autrement dit le voisinage sortant de X est égal à l'ensemble des extrémités terminales des arcs de la coupe sortante définie par X . Similairement, l'ensemble des sommets de $V \setminus X$ qui ont au moins un successeur dans X est appelé **voisinage entrant** de X et est noté $N_G^-(X)$ (FIG. 2.7(b)). Autrement dit le voisinage entrant de X est égal à l'ensemble des extrémités initiales des arcs de la coupe entrante définie par X . Notons que si G est simple et v est un sommet de G , alors $d_G^+(v) = |N_G^+(v)|$ et $d_G^-(v) = |N_G^-(v)|$.

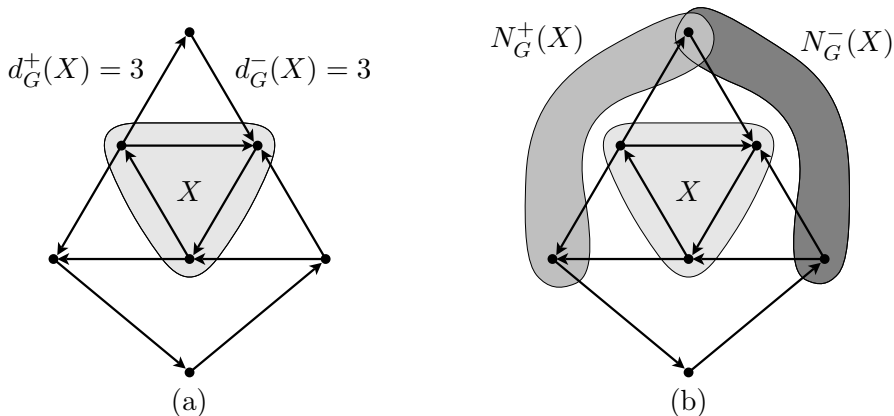
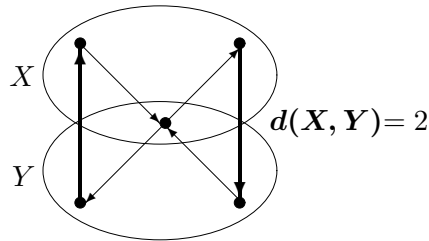


FIGURE 2.7 – Pour un sous-ensemble X de sommets d'un graphe orienté G : (a) les degrés sortant et entrant de X , (b) les voisinages sortant et entrant de X .

Pour deux ensembles X et Y de sommets de G , $d(X, Y)$ est le nombre d'arcs ayant une extrémité dans $X \setminus Y$ et l'autre dans $Y \setminus X$ (FIG. 2.8).

Exercice 123 Montrer que pour tout graphe orienté $G = (V, A)$, le nombre d'arcs de G est égal à la somme des degrés sortants et aussi à la somme des degrés entrants, c'est-à-dire

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = |A| = \sum_{v \in V} d^-(v).$$

FIGURE 2.8 – Les arcs comptés en $d(X, Y)$ sont indiqués en gras

Solution 123 Calculer la somme des degrés sortants des sommets d'un graphe orienté G revient à compter les arcs sortants de chaque sommet et puis à ajouter ces nombres. Chaque arc est l'arc sortant d'exactly un sommet, donc dans la somme on compte chaque arc exactement une fois, d'où

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = |A|.$$

De même, on a $\sum_{v \in V} d^-(v) = |A|$. □

Exercice 124 Montrer que pour un sous-ensemble X de sommets d'un graphe orienté $G = (V, A)$ on a

$$\sum_{v \in X} d^-(v) = d^-(X) + |A(G[X])|, \quad (2.1)$$

$$\sum_{v \in X} (d^+(v) - d^-(v)) = d^+(X) - d^-(X). \quad (2.2)$$

Solution La somme $\sum_{v \in X} d^-(v)$ est égale au nombre d'arcs ayant leur extrémité terminale dans X . Or l'extrémité initiale d'un arc dont l'extrémité terminale est dans X , est ou bien dans X ou bien dans $V \setminus X$. Dans le premier cas, l'arc est dans $G[X]$, et dans le second cas, à $\delta^-(X)$. Ces deux ensembles étant disjoints, on a

$$\begin{aligned} \sum_{v \in X} d^-(v) &= |A(G[X]) \cup \delta^-(X)| \\ &= |A(G[X])| + d^-(X), \end{aligned}$$

ainsi (2.1) est bien démontrée.

Symétriquement, on a $\sum_{v \in X} d^+(v) = |A(G[X])| + d^+(X)$. En soustrayant (2.1) de cette équation, on obtient (2.2). □

Exercice 125 Soit G un graphe orienté tel que pour chaque sommet, le degré entrant est égal au degré sortant. Montrer que pour tout sous-ensemble X de sommets de G , le degré entrant de X est égal au degré sortant de X .

Solution D'après (2.2) de l'Exercice 124, $d^+(X) - d^-(X) = \sum_{v \in X} (d^+(v) - d^-(v)) = 0$ par l'hypothèse sur les degrés, et ainsi $d^+(X) = d^-(X)$. □

Exercice 126 Soient X et Y deux sous-ensembles de sommets d'un graphe orienté G . Montrer que

$$d^+(X) + d^+(Y) = d^+(X \cap Y) + d^+(X \cup Y) + d(X, Y), \quad (2.3)$$

$$d^+(X) + d^+(Y) \geq d^+(X \cap Y) + d^+(X \cup Y), \quad (2.4)$$

$$d^-(X) + d^-(Y) \geq d^-(X \cap Y) + d^-(X \cup Y). \quad (2.5)$$

Solution Soient $A_1 := X \cap Y$, $A_2 := V(G) \setminus (X \cup Y)$, $A_3 := X \setminus Y$, $A_4 := Y \setminus X$. Dénotons par d_{ij} le nombre d'arcs de A_i à A_j . Voir FIG. 2.9.

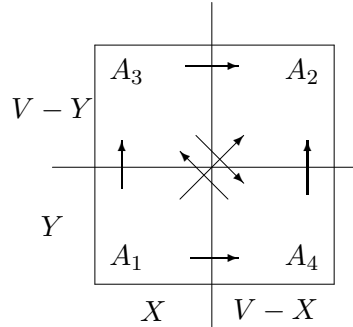


FIGURE 2.9 – Les ensembles A_1, A_2, A_3, A_4 .

Alors on voit que

$$d^+(X) = d_{12} + d_{14} + d_{32} + d_{34}$$

$$d^+(Y) = d_{12} + d_{13} + d_{42} + d_{43}$$

$$d^+(X \cap Y) = d_{12} + d_{13} + d_{14}$$

$$d^+(X \cup Y) = d_{12} + d_{32} + d_{42}$$

$$d(X, Y) = d_{34} + d_{43}$$

d'où vient l'égalité (2.3).

Puisque $d(X, Y) \geq 0$, (2.3) implique directement (2.4).

Soit G' le graphe orienté obtenu à partir de G en inversant l'orientation de tous les arcs. On a $d_G^-(Z) = d_{G'}^+(Z)$ pour tout sous-ensemble Z de sommets. En appliquant (2.4) à G' on obtient (2.5) pour G . \square

2.2 Chemins, Circuits

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté. Un **chemin** P de G est une séquence alternée de sommets et d'arcs de G :

$$P = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k,$$

où $v_i \in V$ pour $0 \leq i \leq k$ et $e_i = v_{i-1} v_i \in A$ pour $1 \leq i \leq k$ (FIG. 2.10 (a)). On notera $\mathbf{V}(P)$ l'ensemble de ses sommets $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ et $\mathbf{A}(P)$ l'ensemble de ses arcs $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$. S'il n'y a pas d'ambiguïté on pourra utiliser la notation $P = v_0 v_1 \dots v_k$. Une suite constituée d'un sommet est considérée comme un chemin.

Remarque 46 Dans un graphe orienté, tout chemin est une chaîne mais la réciproque n'est pas vraie.

Un chemin est un chemin **simple** si ses arcs sont tous distincts (FIG. 2.10 (b)), et c'est un chemin **élémentaire** si ses sommets sont tous distincts (FIG. 2.10 (c)). Si on veut mentionner explicitement le sommet initial v_0 et le sommet terminal v_k de P , on dit que P est un **(v_0, v_k) -chemin** ou chemin de v_0 à v_k , ou bien que les **extrémités** initiale et terminale de P sont respectivement v_0 et v_k . Étant donnés deux sommets v_i, v_j de $P, i \leq j$,

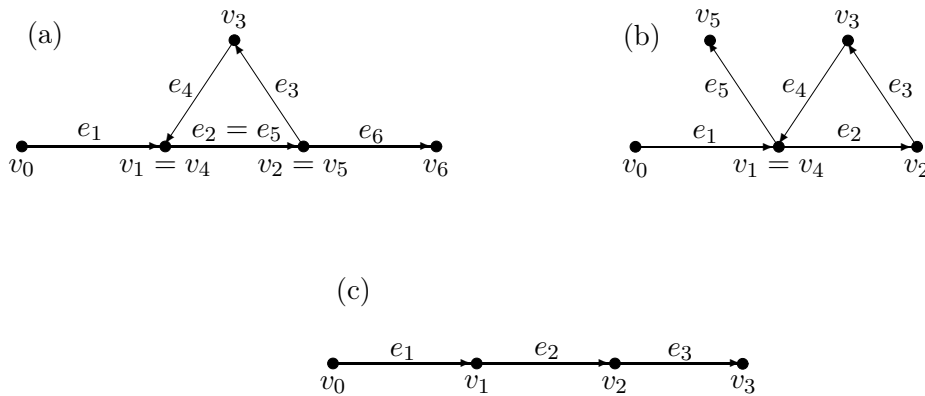


FIGURE 2.10 – (a) un chemin, (b) un chemin simple, (c) un chemin élémentaire.

$$P[v_i, v_j] = v_i e_{i+1} v_{i+1} e_{i+2} \dots e_j v_j$$

est appelé **sous-chemin de P** de v_i à v_j . Si $P = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k$ et $Q = u_0 f_1 u_1 f_2 u_2 \dots f_l u_l$ sont deux chemins tels que le sommet terminal de P et le sommet initial de Q coïncident, c'est-à-dire $v_k = u_0$, alors la **concaténation** de P et Q notée $P + Q$ (FIG. 2.11) dénote le chemin

$$v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k (= u_0) f_1 u_1 f_2 u_2 \dots f_l u_l.$$

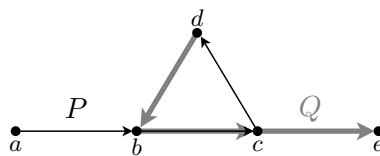


FIGURE 2.11 – La concaténation $P + Q = abcd bce$ des chemins $P = abcd$ et $Q = dbce$.

On dira qu'un sommet p est **atteignable** depuis un sommet s s'il existe dans G un chemin de s à p . Un sommet s de G est une **racine** de G tous les autres sommets de G sont atteignables depuis s .

Remarque 47 Si un graphe orienté possède une racine alors il est connexe.

Exercice 127 Soit s une racine d'un graphe orienté G . Soient v un sommet de G , distinct de s , et $S^+(v)$ l'ensemble des sommets de G qui sont atteignables dans G à partir de v . Montrer que s est une racine de $G - S^+(v)$.

Solution Soit u un sommet quelconque de $G - S^+(v)$. Puisque s est une racine de G , il existe un chemin P de s à u dans G . Supposons que P contienne un sommet w de $S^+(v)$. Alors, par la définition de $S^+(v)$, G contient un chemin Q de v à w . Comme la concaténation de Q et du sous-chemin de P de w à u est un chemin de v à u dans G , on obtient que le sommet u appartient à $S^+(v)$ ce qui est une contradiction. Par conséquent, P est un chemin de s à u dans $G - S^+(v)$. On en conclut que s est une racine de $G - S^+(v)$. \square

Un **circuit** C est une séquence circulaire alternée de sommets et d'arcs de G :

$$C = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k$$

où $k \geq 1, v_i \in V$ pour $0 \leq i \leq k - 1$ et $e_i = v_{i-1} v_i \in A$ pour $1 \leq i \leq k - 1$ et $e_k = v_{k-1} v_0 \in A$ sont des arcs distincts (FIG. 2.12 (a)). Autrement dit, un circuit correspond à un chemin simple dont les extrémités sont confondues et contenant au moins un arc. On notera $V(C)$ l'ensemble de ses sommets et $A(C)$ l'ensemble de ses arcs. Un **circuit élémentaire** est un circuit dont les sommets sont distincts (FIG. 2.12 (b)).

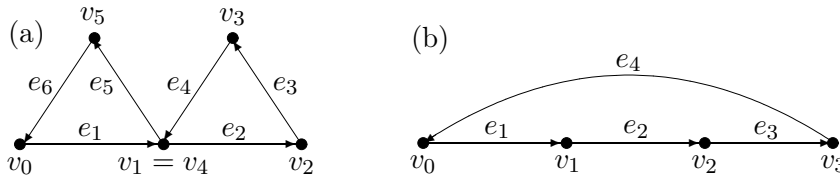


FIGURE 2.12 – (a) un circuit, (b) un circuit élémentaire.

Remarque 48 *Puisqu'un circuit C est une séquence circulaire, n'importe quel sommet v de C et n'importe quel arc de C sortant de v , peuvent être choisis comme v_0 et e_1 de la séquence.*

Remarque 49 *Quand on enlève un arc uv à un circuit, la séquence obtenue est un chemin simple de v à u .*

Remarque 50 *Pour n'importe quel couple (x, y) de sommets d'un circuit C , en parcourant C , on a un (x, y) -chemin.*

Remarque 51 *Etant donnés deux chemins simples arc-disjoints, l'un de u à v et l'autre de v à u , leur concaténation est un chemin de u à u , formellement ce n'est donc pas une séquence circulaire mais elle pourra néanmoins être considérée comme un circuit.*

Dans la suite on pourra aussi considérer un chemin simple ou un circuit comme le graphe orienté induit par ses ensembles de sommets et d'arcs. La **longueur** d'un chemin ou d'un circuit est le nombre d'arcs le constituant.

Remarque 52 *Dans un graphe orienté G à n sommets, un chemin élémentaire est de longueur inférieure ou égale à $n - 1$. Par conséquent, la longueur maximum d'un chemin élémentaire de G peut être définie.*

Exercice 128 *Soient u et v deux sommets d'un graphe orienté G . Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) *Il existe un chemin de u à v dans G .*

- (b) Il existe un chemin simple de u à v dans G .
 (c) Il existe un chemin élémentaire de u à v dans G .

Solution Il est évident que (c) implique (b) et que (b) implique (a). Il suffit donc de montrer que (a) implique (c). Par (a), il existe un chemin de u à v dans G , soit

$$P = x_0(=u)e_1x_1e_2x_2\dots e_kx_k(=v)$$

un tel chemin de longueur minimum. On va montrer que P est un chemin élémentaire. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un sommet qui apparaît plus d'une fois dans le chemin P , c'est-à-dire qu'il existe deux indices distincts i et j tels que $x_i = x_j$. En enlevant de P la sous-suite $x_ie_{i+1}\dots x_{j-1}e_j$ entre x_i et x_j on obtient un chemin de u à v qui est plus court que P ce qui contredit notre hypothèse sur P . \square

Remarque 53 Dans la solution de l'Exercice 128, on montre plus précisément que tout chemin C contient un sous-chemin qui a les mêmes extrémités que C et qui est élémentaire.

Exercice 129 (Caractérisation de l'existence d'un chemin d'un sommet à un autre) Soient u et v deux sommets d'un graphe orienté G . Montrer qu'il existe un chemin de u à v dans G si et seulement si pour tout sous-ensemble X de sommets de G contenant u mais pas v , il existe au moins un arc de G qui sort de X .

Solution Montrons tout d'abord que la condition est nécessaire. Supposons donc qu'il existe un chemin $Q = v_1v_2\dots v_{l-1}v_l$ de u à v dans G . Considérons un sous-ensemble X de sommets de G tel que $u \in X$, $v \notin X$. Soit i le plus petit indice tel que $v_i \notin X$ (cet indice existe car $v_l = v \notin X$). Comme le premier sommet $v_1 = u$ de Q appartient à X , on a $i \geq 2$, d'où $v_{i-1} \in X$. L'arc $v_{i-1}v_i$ existe dans G puisqu'il appartient au chemin Q . Par ce qui précède, $v_{i-1}v_i$ sort de X .

Pour vérifier que la condition est suffisante, supposons qu'elle soit satisfaite. Soit X l'ensemble des sommets x de G pour lesquels il existe dans G un chemin (noté P_x) de u à x . On veut démontrer que v appartient à X . Supposons par l'absurde que $v \notin X$. Puisque $u \in X$, il existe alors, par l'hypothèse, un arc xy sortant de X . Ainsi $P_x + xy$ est un chemin de u à y , et y devrait donc appartenir à X , ce qui est une contradiction. \square

Remarque 54 Dans la solution de l'Exercice 129, on montre plus précisément que tout (u, v) -chemin Q contient un arc qui sort de X pour tout sous-ensemble X de sommets de G contenant u mais pas v .

Exercice 130 Soient x, y et z trois sommets d'un graphe orienté G . Montrer que s'il existe dans G un (x, y) -chemin élémentaire et un (y, z) -chemin élémentaire, alors il existe un (x, z) -chemin élémentaire.

Solution Soit P_{xy} (respectivement P_{yz}) un chemin élémentaire de x à y (resp. de y à z). La concaténation $P_{xz} := P_{xy} + P_{yz}$ est un (x, z) -chemin et, d'après l'Exercice 128, il existe donc un (x, z) -chemin élémentaire dans G . \square

Exercice 131 Soient G un graphe orienté, u et v deux sommets de G , X un sous-ensemble de sommets de G et u' et v' les images de u et v dans le graphe orienté contracté G/X . Montrer que s'il existe un (u, v) -chemin dans G alors il existe un (u', v') -chemin dans G/X .

Solution Par définition, pour $w \in V(G)$, $w' = v_X$ si $w \in X$ et $w' = w$ sinon. Soit $P = v_1v_2 \dots v_{l-1}v_l$ un (u, v) -chemin dans G . Si P ne contient aucun sommet de X , alors P est un (u', v') -chemin dans G/X . Sinon, P contient au moins un sommet de X ; soient i et j respectivement le plus petit et le plus grand indice des sommets de P appartenant à X . Le chemin P' dans G/X obtenu à partir de P en remplaçant le sous-chemin $P[v_i, v_j]$ par le sommet v_X est un (u', v') -chemin (FIG. 2.13).

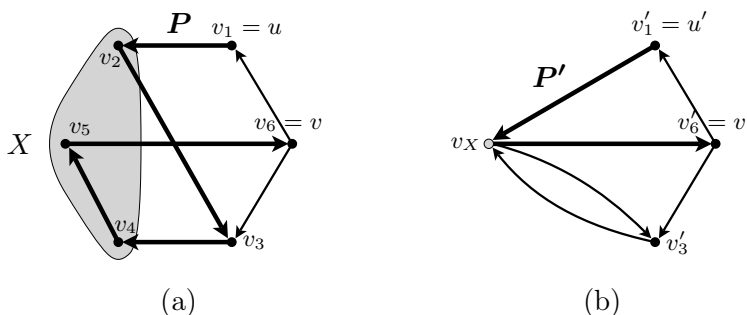


FIGURE 2.13 – (a) Un graphe orienté G , un ensemble de sommets X et un (u, v) -chemin P dans G , (b) le graphe orienté contracté G/X et un (u', v') -chemin P' dans G/X . □

Exercice 132 Soit G un graphe orienté. Montrer que :

- (a) si tous les degrés sortants des sommets de G sont strictement positifs, alors G possède un circuit élémentaire.
- (b) si tous les degrés entrants des sommets de G sont strictement positifs, alors G possède un circuit élémentaire.

Solution (a) Soit P un chemin élémentaire de G de longueur maximum et soit x le dernier sommet de P . Par hypothèse, il existe un arc xy qui sort de x . Alors y est un sommet de P , car sinon $P + xy$ serait un chemin élémentaire plus long que P , ce qui contredirait notre hypothèse sur P . Par conséquent, $C = P[y, x] + xy$ est un circuit élémentaire. (FIG. 2.14).

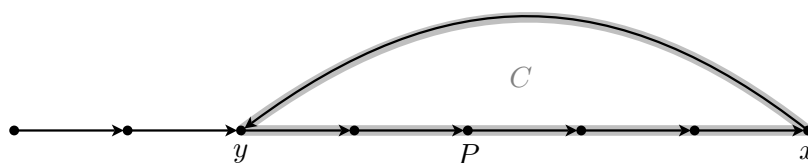


FIGURE 2.14 – Le chemin élémentaire P et le circuit élémentaire C .

(b) Soit G' le graphe orienté obtenu à partir de G en inversant l'orientation de chaque arc. On remarque que l'hypothèse de (b) pour G implique l'hypothèse de (a) pour G' . Par (a), il existe un circuit élémentaire C' de G' , et en inversant à nouveau l'orientation de chaque arc, il existe un circuit élémentaire C de G . □

Exercice 133 (Justification de l'algorithme Circuit (FIG. 2.15)) Montrer que :

- (a) lors de la i -ième itération de l'Étape 1, l'arc e existe et P_i est un chemin élémentaire de u_i à u_1 dans G ,

ALGORITHME CIRCUIT :

ENTRÉE : Un graphe orienté G dont chaque sommet est de degré entrant strictement positif.

SORTIE : Un circuit élémentaire C de G .

Étape 0 : *Initialisation.*
 Choisir un sommet u_1 de G , $P_0 := \emptyset, i := 1$.

Étape 1 : *Construction d'un circuit élémentaire.*
 Tant que $u_i \notin V(P_{i-1})$ faire :
 $P_i := u_i P_{i-1}$,
 Choisir un arc e entrant en u_i ,
 $u_{i+1} :=$ extrémité initiale de e ,
 $i := i + 1$.

Étape 2 : *Arrêt avec un circuit.*
 STOP avec le circuit $C := P_{i-1}[u_{i-1}, u_i] + u_i u_{i-1}$.

FIGURE 2.15 – Algorithme Circuit.

(b) l'algorithme se termine à l'Étape 2 et C est un circuit élémentaire de G .

Solution (a) Par hypothèse, chaque sommet de G est de degré entrant strictement positif. En conséquence, pour chaque sommet u_i de G il existe un arc e entrant en u_i . On va montrer (a) en raisonnant par récurrence sur i . Pour $i = 1$, P_1 est un chemin élémentaire de u_1 à lui-même. Supposons maintenant que la propriété est vérifiée pour i . Alors P_{i+1} , qui est égal à la concaténation des chemins élémentaires $u_{i+1}u_i$ et P_i , est un chemin de u_{i+1} à u_1 ; et puisque u_{i+1} est différent de tous les autres sommets de P_{i+1} , ce chemin est élémentaire.

(b) Le nombre de sommets de G étant fini, l'Étape 1 se termine après au plus $|V(G)|$ itérations. Par le critère d'arrêt de l'Étape 1, le sommet u_i appartient à P_{i-1} et donc, par (a), $P_{i-1}[u_{i-1}, u_i]$ est un chemin élémentaire de u_{i-1} à u_i . En lui rajoutant l'arc $u_i u_{i-1}$, on obtient bien le circuit C (FIG. 2.16).

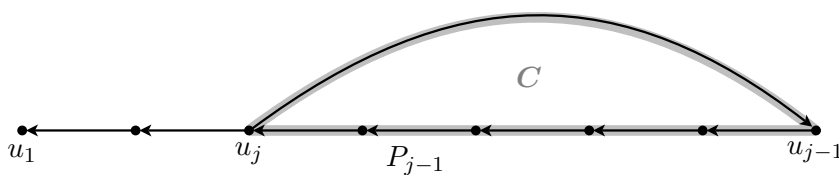


FIGURE 2.16 – Le chemin élémentaire P_{j-1} et le circuit élémentaire C .

□

Exercice 134 Montrer que pour un graphe orienté G les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) Il existe une partition des arcs de G en circuits élémentaires.
- (b) Il existe une partition des arcs de G en circuits.
- (c) G vérifie la condition suivante :

$$d_G^+(v) = d_G^-(v) \text{ pour tout } v \in V(G). \tag{2.6}$$

Solution (a) \implies (b) : C'est évident.

(b) \implies (c) : Soient C_1, \dots, C_k , k circuits de G tels que chaque arc de G appartient à un et un seul de ces circuits. Soit v un sommet quelconque de G . Pour chaque circuit C_i , en le parcourant, à tout arc entrant de v correspond un arc sortant de v . Puisque, par définition d'un circuit, les arcs de C_i sont tous distincts, on en déduit que le nombre d'arcs entrants de v contenus dans C_i est égal au nombre d'occurrences du sommet v dans C_i qui est égal au nombre d'arcs sortants de v contenus dans C_i , c'est-à-dire $d_{C_i}^-(v) = d_{C_i}^+(v)$. De plus, chaque arc incident à v appartient à un unique C_i ($1 \leq i \leq k$). D'où (2.6), car

$$d_G^-(v) = \sum_{i=1}^k d_{C_i}^-(v) = \sum_{i=1}^k d_{C_i}^+(v) = d_G^+(v).$$

(c) \implies (a) : Montrons, par récurrence sur $m = |A(G)|$, que la condition (2.6) implique (a). Si $m = 0$, alors il n'y a rien à prouver. Supposons donc que la condition (2.6) implique (a) pour les graphes orientés dont le nombre d'arcs est strictement plus petit que m ($m \geq 1$). Soit G un graphe orienté satisfaisant (2.6) possédant m arcs.

Montrons d'abord que G contient un circuit élémentaire. Puisque l'ensemble des arcs de G n'est pas vide, il existe G_1 , une composante connexe de G , qui contient au moins un arc. Alors les demi-degrés des sommets de G_1 sont les mêmes dans G_1 et dans G et chaque sommet de G_1 est incident à au moins un arc. Par conséquent, G_1 lui aussi, satisfait (2.6). Pour tout $v \in V(G_1)$, on a donc $d_{G_1}^+(v) = d_{G_1}^-(v)$, et de plus, $d_{G_1}^+(v) + d_{G_1}^-(v) \geq 1$ d'où $d_{G_1}^+(v) \geq 1$. D'après l'Exercice 132, G_1 , et donc G , contient un circuit élémentaire C .

Soit G' le graphe orienté obtenu à partir de G en supprimant les arcs de C . On a $|A(G')| < m$. Pour chaque sommet v de G , si $v \in V(C)$ alors on a supprimé un arc entrant et un arc sortant de v et sinon on n'a supprimé aucun arc incident à v . Donc G' , comme G , satisfait (2.6). En vertu de l'hypothèse de récurrence, il existe un ensemble de circuits élémentaires C_1, \dots, C_k qui partitionnent $A(G') = A(G) \setminus A(C)$. Donc $A(G)$ est l'union disjointe des circuits élémentaires C_1, C_2, \dots, C_k et C . \square

Remarque 55 Par l'Exercice 134, l'ensemble des arcs d'un circuit peut être partitionné en sous-ensembles d'arcs induisant chacun un circuit élémentaire.

Remarque 56 L'ensemble des arcs d'un (s, t) -chemin simple peut être partitionné en sous-ensembles d'arcs induisant pour l'un d'eux un (s, t) -chemin élémentaire et pour chacun des autres un circuit élémentaire. En effet, en ajoutant un arc e de t à s à un (s, t) -chemin, on obtient un circuit dont, par la Remarque 55, les arcs peuvent être partitionnés en sous-ensembles d'arcs induisant chacun un circuit élémentaire. Celui d'entre eux qui contient l'arc e fournit, après suppression de e , un (s, t) -chemin élémentaire.

Exercice 135 Soient $G = (V, A)$ un graphe orienté et $s, t \in V$ tels que

$$d^+(s) - d^-(s) = k, \tag{2.7}$$

$$d^+(t) - d^-(t) = -k, \tag{2.8}$$

$$d^+(v) - d^-(v) = 0 \quad \text{pour tout } v \in V \setminus \{s, t\}. \tag{2.9}$$

(a) Montrer que G possède k chemins arc-disjoints de s à t .

(b) Trouver trois chemins arc-disjoints de s à t dans le graphe orienté de la FIG. 2.17.

Solution (a) Soit G' le graphe orienté obtenu à partir de G en rajoutant k arcs de t à s , dénotés a_1, \dots, a_k (FIG. 2.18(a)). Alors, par (2.7)-(2.9), (2.6) est satisfaite. D'après l'Exercice 134, il existe

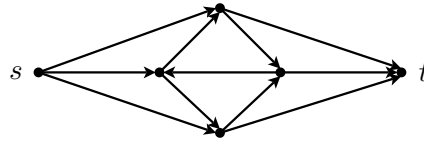


FIGURE 2.17 – Un graphe orienté G qui satisfait les condition de l'Exercice 135 pour $k = 3$.

un ensemble \mathcal{C} de circuits élémentaires qui partitionne $A(G')$. Pour chaque i , ($1 \leq i \leq k$), soit C_i le circuit de \mathcal{C} qui contient l'arc a_i (FIG. 2.18(b)). Puisque les arcs a_1, \dots, a_k sont parallèles et les circuits C_1, \dots, C_k sont élémentaires, ces circuits sont distincts. Alors $P_1 = C_1 - a_1, \dots, P_k = C_k - a_k$ sont k chemins arc-disjoints de s à t (FIG. 2.18(c)).

(b) Voir la FIG. 2.18.

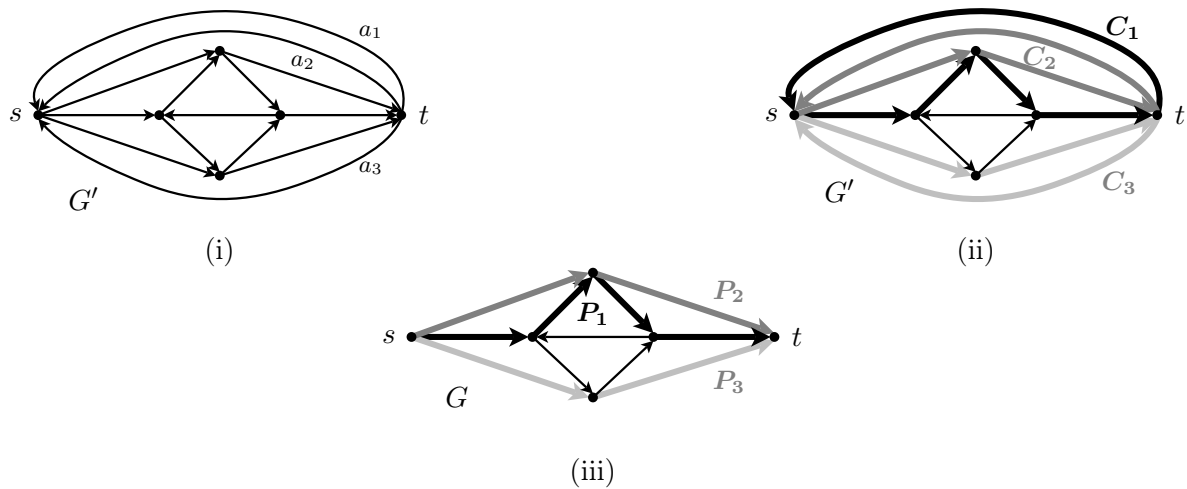


FIGURE 2.18 – La résolution de l'Exercice 135(b) en utilisant la preuve de l'Exercice 135(a). (i) Le graphe orienté G' , (ii) les circuits C_1, C_2, C_3 dans G' , (iii) Les chemins P_1, P_2, P_3 dans G . □

2.3 Graphes orientés sans circuit

Étant donné un graphe orienté G , une numérotation v_1, v_2, \dots, v_n des sommets de G est appelée **ordre topologique** de G (FIG. 2.19) si

$$\text{pour tout arc } v_i v_j \text{ de } G \text{ on a } i < j. \tag{2.10}$$

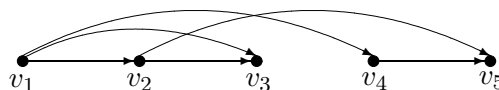


FIGURE 2.19 – Un ordre topologique d'un graphe orienté.

Exercice 136 Soit G un graphe orienté. Montrer qu'il existe un ordre topologique de G si et seulement si G est sans circuit.

Solution Montrons tout d'abord que la condition est nécessaire. Soit donc v_1, v_2, \dots, v_n un ordre topologique de G . Supposons par l'absurde qu'il existe un circuit $C = v_{i_1} v_{i_2} v_{i_3} \dots v_{i_k} v_{i_{k+1}} (= v_{i_1})$ dans G . Pour chaque indice j , $1 \leq j \leq k$, on a que $v_{i_j} v_{i_{j+1}}$ est un arc de C et donc de G ; par conséquent, puisque l'ordre est topologique, par (2.10), l'inégalité $i_j < i_{j+1}$ est vraie. On en déduit que $i_1 < i_2 < i_3 < \dots < i_k < i_{k+1} = i_1$, d'où la contradiction $i_1 < i_1$.

On montre que la condition est suffisante par récurrence sur le nombre n de sommets du graphe orienté. Si $n = 1$ il n'y a rien à démontrer. Supposons que tout graphe orienté à n sommets et sans circuit possède un ordre topologique. Soit G un graphe orienté à $n + 1$ sommets et sans circuit (FIG. 2.20(a)). D'après l'Exercice 132, dans G il existe un sommet v sans arc sortant. Le graphe orienté G' , obtenu à partir de G en supprimant le sommet v (FIG. 2.20(b)), est sans circuit et a n sommets. En vertu de l'hypothèse de récurrence il existe un ordre topologique v_1, v_2, \dots, v_n de G' (FIG. 2.20(c)). Puisque le sommet v est sans arc sortant, en le rajoutant comme v_{n+1} à cet ordre, on obtient un ordre topologique de G (FIG. 2.20(d)). En effet, les arcs de G qui sont aussi dans G' , vérifient encore la condition (2.10), et les autres arcs de G la vérifient aussi car ils ont tous v , le dernier sommet dans l'ordre, comme extrémité terminale.

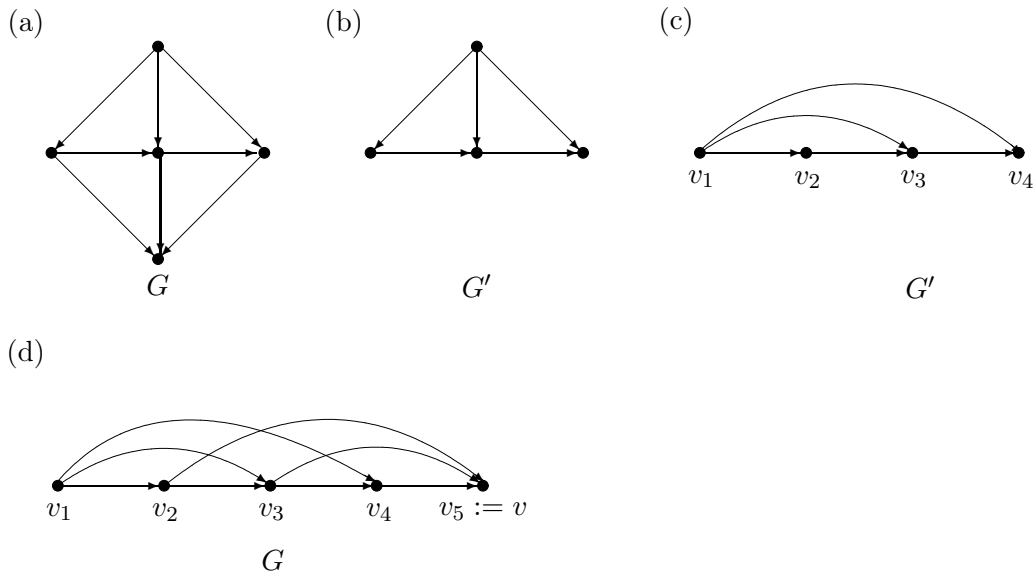


FIGURE 2.20 – Les étapes de la démonstration de la condition suffisante de l'Exercice 136. \square

Exercice 137 (Justification de l'algorithme Ordre Topologique (FIG. 2.21)) Montrer que :

- si l'algorithme s'arrête lors d'une exécution de l'Étape 2, alors v_1, \dots, v_n est un ordre topologique de G ,
- si l'algorithme ne s'est pas arrêté à l'Étape 2, alors il se termine à l'Étape 3 et C est un circuit de G .

Solution (a) Si l'algorithme s'arrête lors d'une exécution de l'Étape 2, alors par le critère d'arrêt, tous les sommets ont été numérotés. Remarquons que pour tout j entre 1 et n , G_j est le sous-graphe de G induit par les sommets v_j, \dots, v_n . Soit $v_i v_j$ un arc quelconque de G . Par le choix du

ALGORITHME ORDRE TOPOLOGIQUE :

ENTRÉE : Un graphe orienté G .

SORTIE : Un ordre topologique de G ou un circuit de G .

Étape 0 : *Initialisation.*
 $G_0 := G, i := 1$.

Étape 1 : *Choix du sommet.*
 Tant qu'il existe $v \in V(G_i)$ tel que $d_{G_i}^-(v) = 0$ faire :
 $G_{i+1} := G_i - v, v_i := v, i := i + 1$.

Étape 2 : *Arrêt avec un ordre topologique.*
 Si $V(G_i) = \emptyset$, alors STOP avec v_1, \dots, v_n où n est le nombre de sommets de G .

Étape 3 : *Arrêt avec un circuit.*
 Appliquer l'algorithme Circuit (FIG. 2.15) au graphe orienté G_i pour obtenir un circuit C de G .
 STOP.

FIGURE 2.21 – Algorithme Ordre Topologique.

sommet v_j à l'Étape 1, v_j est de degré entrant égal à 0 dans G_j . Par conséquent, v_i n'appartient pas à G_j et donc $i < j$, ainsi la condition (2.10) est satisfaite.

(b) Si l'algorithme ne s'est pas arrêté à l'Étape 2, alors $|V(G_i)| \neq \emptyset$ et chaque sommet de G_i est de degré entrant strictement positif dans G_i . Donc on peut appliquer l'algorithme Circuit (FIG. 2.15) à G_i pour obtenir un circuit C de G_i . Puisque G_i est un sous-graphe de G , C est un circuit de G .

Exercice 138 Soit G un graphe orienté. Montrer que s'il existe un ensemble F de k arcs tel que le graphe orienté obtenu à partir de G en supprimant les arcs de F ne contienne pas de circuit, alors il existe un ensemble F' d'au plus k arcs tel qu'en changeant dans G l'orientation des arcs de F' on obtienne un graphe orienté sans circuit.

Solution Soit F un ensemble de k arcs de G (FIG. 2.22(a)) tel que $G' := G - F$ (FIG. 2.22(b)) soit sans circuit. D'après l'Exercice 136, il existe un ordre topologique de G' , soit v_1, v_2, \dots, v_n un tel ordre (FIG. 2.22(c)). Remarquons que cet ordre est aussi un ordre des sommets de G . On considère F' l'ensemble des arcs $v_i v_j$ de G tels que $i > j$ (FIG. 2.22(d)). Puisque v_1, v_2, \dots, v_n est un ordre topologique de G' , les arcs de F' ne sont pas dans G' , ils appartiennent donc à F , et on a $|F'| \leq |F| \leq k$. Soit G'' le graphe orienté (FIG. 2.22(e)) obtenu à partir de G en changeant l'orientation des arcs de F' . Pour chaque arête $v_i v_j$ de G'' , on a $i < j$, c'est-à-dire que v_1, v_2, \dots, v_n est un ordre topologique de G'' et donc, par l'Exercice 136, G'' est sans circuit, ainsi F' est l'ensemble voulu. □

Exercice 139 Soit G un graphe orienté. Montrer qu'il existe une partition $\{A_1, A_2\}$ des arcs de G telle que les graphes partiels de G induits par A_1 et A_2 soient sans circuits.

Solution Soit v_1, \dots, v_n un ordre quelconque des sommets de $G = (V, A)$. On définit A_1 l'ensemble des arcs $v_i v_j$ de G tels que $i < j$ et A_2 l'ensemble des arcs $v_i v_j$ de G tels que $i > j$. Par définition, $A_1 \cap A_2 = \emptyset, A_1 \cup A_2 = A, v_1, \dots, v_n$ est un ordre topologique des sommets de (V, A_1) , et l'ordre inverse v'_1, \dots, v'_n (c'est-à-dire $v'_i = v_{n+1-i}$ pour $i = 1, \dots, n$) est un ordre topologique des sommets de (V, A_2) . Par l'Exercice 136, ces deux graphes partiels de G sont sans circuit. □

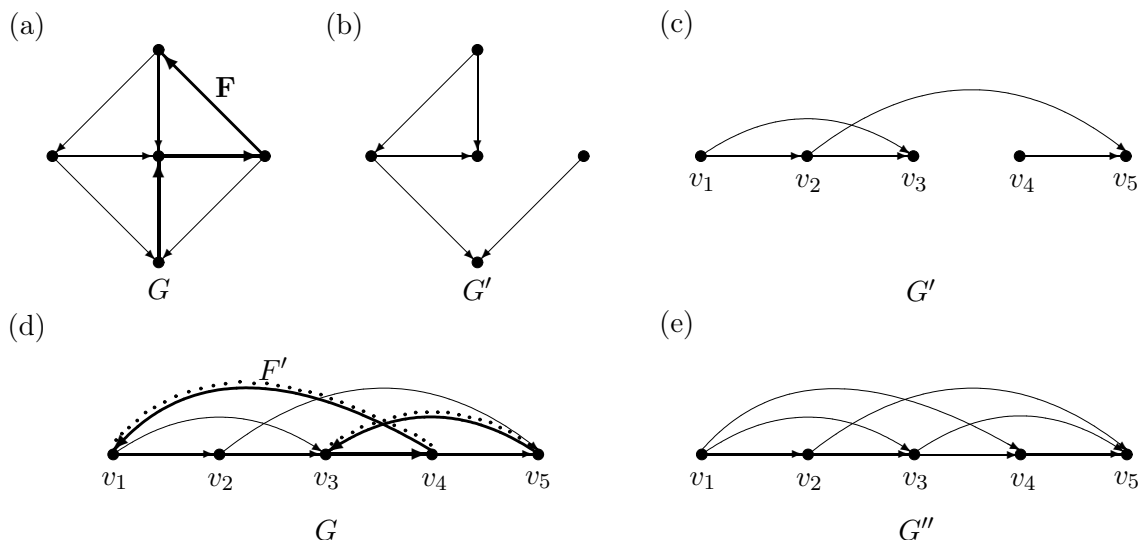


FIGURE 2.22 – Les étapes de la démonstration de l’Exercice 138.

2.4 Arboressences et l’algorithme de Marquage Orienté

On dit qu’un graphe orienté est une **arborescence** si c’est un arbre qui possède une racine.

Exercice 140 Une arborescence possède exactement une racine.

Solution Soit G une arborescence. Par définition, G possède au moins une racine. Supposons par l’absurde que u et v sont deux racines distinctes de G . Il existe alors un chemin P_1 de u à v et un chemin P_2 de v à u . Soient ux le premier arc de P_1 et yu le dernier arc de P_2 . Ces arcs sont distincts puisque l’un est un arc sortant et l’autre est un arc entrant de u . Par conséquent, P_1 et P_2 sont deux chaînes distinctes entre u et v dans G ce qui contredit le fait que G est un arbre par l’Exercice 80. \square

Par l’Exercice 140, une arborescence possède exactement une racine ; si on veut préciser le nom s de la racine on écrira **s -arborescence**, voir FIG. 2.23(a). Soit G un graphe orienté. Un graphe partiel de G qui est une arborescence est appelé **arborescence couvrante** de G .

Exercice 141 Soit H un sous-graphe d’une arborescence G . Montrer que si H possède une racine v alors H est une v -arborescence.

Solution Puisque H possède une racine, par la Remarque 47, H est connexe. Par définition, G est sans cycle, donc son sous-graphe H l’est aussi. Ainsi, H est un arbre et v est une racine de H , autrement dit H est une v -arborescence. \square

Soient G une s -arborescence et v un sommet de G . Soit H le sous-graphe de G induit par les sommets qui sont atteignables dans G à partir de v . Par l’Exercice 141, H est une v -arborescence. On dit que H est la **sous-arborescence de G de racine v** . On notera H comme $G^{[v]}$.

Une **anti-racine** d’un graphe orienté G est un sommet qui peut être atteint par un chemin à partir de tout sommet de G . Un arbre dont s est une anti-racine est appelé **anti-arborescence** d’anti-racine s , ou **s -anti-arborescence**, voir FIG. 2.23(b).

Remarque 57 En inversant l’orientation de tous les arcs d’une s -arborescence, on obtient une s -anti-arborescence ; et vice versa, voir FIG. 2.23.

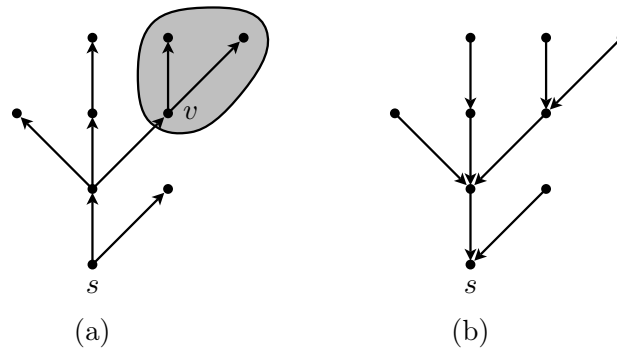


FIGURE 2.23 – (a) Une s -arborescence et sa sous-arborescence de racine v , (b) une s -anti-arborescence.

On dit qu'un graphe orienté G est une **forêt d'arborescences** si chacune de ses composantes connexes est une arborescence ; on appelle **racines** de G les racines des arborescences qui sont les composantes connexes de G .

Exercice 142 Montrer que le graphe orienté F' obtenu à partir d'une s -arborescence F en rajoutant un nouveau sommet v et un arc reliant un sommet u de F à v , est une s -arborescence.

Solution D'après l'Exercice 83, F' est un arbre. Il reste à montrer que s est une racine de F' . Puisque s est une racine de F qui est un sous-graphe de F' , il existe un chemin P_w de s à w pour tous les sommets de F' distinct de v . Or la concaténation des chemins P_u et uv , est un (s, v) -chemin dans F' . On en conclut que s est une racine de F' et que donc F' est une s -arborescence. \square

Exercice 143 Montrer que si on enlève une sous-arborescence de racine v d'une s -arborescence (v distinct de s) alors on obtient une s -arborescence.

Solution Soient F une s -arborescence, v un sommet de F distinct de s et $F^{[v]}$ la sous-arborescence de F dont la racine est v . Par l'Exercice 127, s est une racine de $F - V(F^{[v]})$. Par l'Exercice 141, $F - V(F^{[v]})$ est une s -arborescence. \square

Exercice 144 Soient F une s -arborescence et t un sommet de F . Montrer qu'il existe un et un seul (s, t) -chemin dans F .

Solution Par définition, s est une racine de F et donc il existe au moins un (s, t) -chemin dans F . D'autre part, s'il existait deux (s, t) -chemins dans F , ceux-ci correspondraient à deux (s, t) -chaînes élémentaires dans l'arbre F' obtenu à partir de F en oubliant l'orientation. Or, par l'Exercice 80, il existe une seule (s, t) -chaîne élémentaire dans F' . En conclusion, il existe un et un seul (s, t) -chemin dans F . \square

Remarque 58 Par l'Exercice 144 et la Remarque 53, étant donné une s -arborescence F et un sommet t de F , l'unique (s, t) -chemin dans F est élémentaire.

Remarque 59 Pendant une exécution de l'Algorithme de Marquage Orienté (FIG. 2.24) lorsqu'un nouveau sommet est mis dans l'ensemble courant S_i on dit qu'il est devenu **marqué**.

ALGORITHME DE MARQUAGE ORIENTÉ :

ENTRÉE : Un graphe orienté G et un sommet s de G .

SORTIE : L'ensemble S des sommets qui peuvent être atteints depuis s par un chemin dans G , et un ensemble F d'arcs de G tel que (S, F) soit une s -arborescence.

Étape 0 : *Initialisation.*
 $S_1 := \{s\}$, $i := 1$ et $A_1 := \emptyset$.

Étape 1 : *Marquage.*
 Tant qu'il existe un arc uv de G tel que $u \in S_i, v \notin S_i$ faire :
 $S_{i+1} := S_i \cup \{v\}$,
 $A_{i+1} := A_i \cup \{uv\}$,
 $i := i + 1$.

Étape 2 : *Fin de l'algorithme.*
 $S := S_i$, $F := A_i$, STOP.

FIGURE 2.24 – Algorithme de Marquage Orienté.

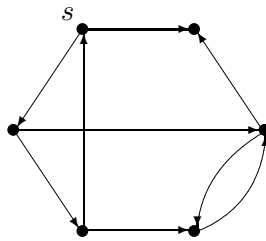


FIGURE 2.25 – Graphe orienté de l'Exercice 145.

Exercice 145 Exécuter l'algorithme de Marquage Orienté (FIG. 2.24) sur le graphe orienté de la FIG. 2.25.

Solution Une exécution de l'algorithme de Marquage Orienté sur le graphe orienté de la FIG. 2.25 est illustrée FIG. 2.26 : les sommets marqués (dans S_i) sont encadrés et les arcs dans A_i sont en gras. □

Exercice 146 (Justification de l'algorithme de Marquage Orienté (FIG. 2.24))

- Montrer que $\delta_G^+(S) = \emptyset$.
- Montrer que pour $1 \leq i \leq |S|$, (S_i, A_i) est une s -arborescence.
- En déduire que S est l'ensemble des sommets de G qui peuvent être atteints depuis s par un chemin.

Solution (a) L'ensemble S obtenu par l'algorithme de Marquage Orienté est égal à un ensemble S_i tel qu'il n'existe pas d'arc uv dans G avec $u \in S_i$ et $v \notin S_i$, ceci est équivalent à $\delta_G^+(S) = \emptyset$.

(b) On va montrer cette propriété en raisonnant par récurrence sur i . Pour $i = 1$, $(S_1, A_1) = (\{s\}, \emptyset)$ est bien une s -arborescence. Supposons maintenant que la propriété est vérifiée pour $1 \leq i : (S_i, A_i)$ est une s -arborescence. Si $i = |S|$, la propriété est démontrée et sinon à l'étape du marquage on définit $S_{i+1} = S_i \cup \{v\}$ et $A_{i+1} = A_i \cup uv$, où $uv \in \delta_G^+(S_i)$. Ainsi par l'Exercice 142, le graphe orienté (S_{i+1}, A_{i+1}) qui est obtenu à partir de la s -arborescence (S_i, A_i) en rajoutant un sommet pendant de degré entrant égal à 1, est une s -arborescence.

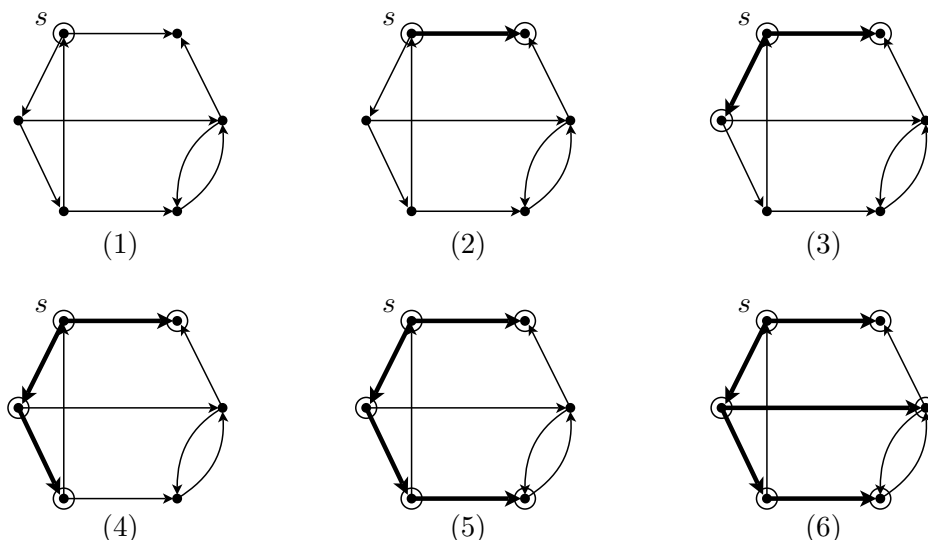


FIGURE 2.26 – Les différentes étapes d’une exécution de l’algorithme de Marquage Orienté sur le graphe orienté de la FIG. 2.25 (Exercice 145).

(c) Par (b), s est une racine de (S, F) , c’est-à-dire qu’il existe dans (S, F) un chemin depuis s vers tous les sommets de S , et puisque $F \subseteq A(G)$, il en est de même dans G . De plus, par (a) et l’Exercice 129, il n’existe pas de chemin de s vers un sommet en dehors de S . L’ensemble S a bien la propriété voulue. \square

ALGORITHME MODIFIÉ DE MARQUAGE ORIENTÉ :

ENTRÉE : Un graphe orienté G et un sommet s de G .

SORTIE : L’ensemble S des sommets à partir desquels s peut être atteint par un chemin dans G , et un ensemble F d’arcs de G tel que (S, F) soit une s -anti-arborescence.

Étape 0 : *Initialisation.*
 $S_1 := \{s\}$, $A_1 := \emptyset$ et $i := 1$.

Étape 1 : *Marquage.*
 Tant qu’il existe un arc vu de G tel que $u \in S_i, v \notin S_i$ faire :
 $S_{i+1} := S_i \cup \{v\}$,
 $A_{i+1} := A_i \cup \{vu\}$,
 $i := i + 1$.

Étape 2 : *Fin de l’algorithme.*
 $S := S_i$, $F := A_i$, STOP.

FIGURE 2.27 – Algorithme Modifié de Marquage Orienté.

Exercice 147 Exécuter l’algorithme Modifié de Marquage Orienté (FIG. 2.27)) sur le graphe orienté de la FIG. 2.25.

Solution Une exécution de l’algorithme modifié de Marquage Orienté est illustrée FIG. 2.28 : les sommets marqués (dans S_i) sont encerclés et les arcs dans A_i sont en gras. \square

Exercice 148 (Justification de l’algorithme Modifié de Marquage Orienté (FIG. 2.27)) Montrer que S est l’ensemble des sommets de G à partir desquels s peut être atteint par un chemin dans G et que (S, F) est une s -anti-arborescence.

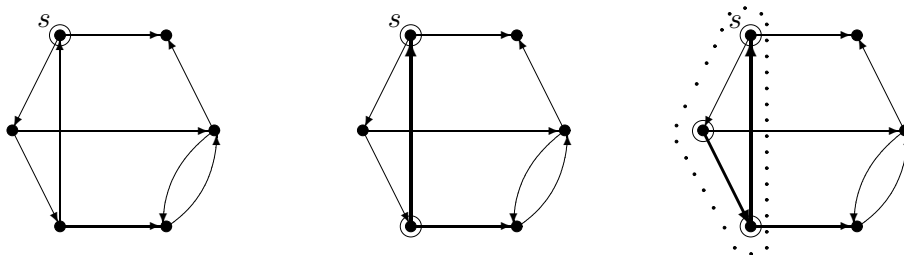


FIGURE 2.28 – Les différentes étapes d’une exécution de l’algorithme modifié de Marquage Orienté sur le graphe orienté de la FIG. 2.25. Les sommets entourés par la ligne pointillée forment l’ensemble S .

Solution Soit G' le graphe orienté obtenu à partir de G en inversant l’orientation de tous les arcs de G . Remarquons qu’à tout (v, s) -chemin dans G correspond un (s, v) -chemin dans G' ; et vice versa. Par ailleurs, l’ensemble S obtenu par l’algorithme Modifié de Marquage Orienté appliqué à G et s est le même que celui obtenu par l’algorithme de Marquage Orienté appliqué à G' et s . Par conséquent et par la validité de l’algorithme de Marquage Orienté (Exercice 146), S et (S, F) ont bien les propriétés voulues. \square

Exercice 149 *Bruce Willis doit passer une épreuve pour éviter une journée en enfer. Les méchants lui fournissent trois récipients dont les contenances sont respectivement de 8, 5 et 3 litres, le récipient de 8 litres est plein, les autres vides. Bruce doit, par une série de transvasements, isoler 4 litres dans chacun des deux premiers récipients. Les récipients ne sont pas gradués, c’est-à-dire qu’une opération de transvasement aura pour effet de vider complètement un des récipients et/ou d’en remplir un autre à ras bord. Proposer une méthode à Bruce pour réussir son épreuve.*

Solution On introduit un graphe orienté G , représenté sur la (FIG. 2.29), grâce auquel on pourra trouver une solution en appliquant l’algorithme de Marquage Orienté (FIG. 2.24).

Les sommets de G sont les triplets (a, b, c) d’entiers qui correspondent aux remplissages possibles des trois récipients dont l’un d’entre eux au moins, par les règles de l’épreuve, doit être vide ou plein. Ces triplets vérifient donc

- $a + b + c = 8$,
- $0 \leq a \leq 8, 0 \leq b \leq 5, 0 \leq c \leq 3$,
- l’un au moins parmi a, b et c est égal à une de ses bornes.

Les arcs de G sont définis de la manière suivante : deux sommets t et t' sont reliés par un arc tt' si et seulement si l’on peut passer des remplissages correspondant à t à ceux correspondant à t' en réalisant un seul transvasement.

Réussir l’épreuve de Bruce correspond à trouver un chemin dans G du sommet $(8, 0, 0)$ au sommet $(4, 4, 0)$. En exécutant l’algorithme de Marquage Orienté on obtient l’ensemble S des sommets de G qui peuvent être atteints depuis $(8, 0, 0)$ par un chemin et une $(8, 0, 0)$ -arborescence (S, F) . On peut alors vérifier que $(4, 4, 0)$ est bien dans S et l’arborescence (S, F) fournit un chemin du sommet $(8, 0, 0)$ au sommet $(4, 4, 0)$. Un tel chemin est indiqué sur la (FIG. 2.29) et il donne la solution suivante :

- remplir le deuxième récipient à l’aide du premier,
- remplir le troisième à l’aide du deuxième,
- vider le troisième dans le premier,

- vider le deuxième dans le troisième,
- remplir le deuxième à l'aide du premier,
- remplir le troisième à l'aide du deuxième,
- vider le troisième dans le premier.

□

Remarque 60 *L'exercice 149 est une variation du problème du marchand de miel de Sam Loyd : "Un marchand de miel rencontra un acheteur désirant quatre litres de miel, mais n'ayant qu'un simple récipient de trois litres et un de cinq. Il est relativement simple de transvaser le miel d'une mesure dans l'autre jusqu'à obtenir les quatre litres désirés. Je vous conseille cependant d'user de votre matière grise afin de trouver le nombre minimum de transvasements nécessaires."*

Exercice 150 *Un guide emmène trois randonneurs pour une ascension du Mont Blanc : une femme, son mari et un célibataire. Ils doivent traverser une cheminée étroite (au plus deux personnes peuvent l'emprunter en même temps) et difficile (l'aide du guide est indispensable pour les randonneurs). Depuis le départ de la randonnée, le célibataire courtise la femme et le mari est très jaloux. Pour éviter tout incident, le guide ne veut pas laisser le célibataire en tête à tête avec la femme ou avec le mari. Comment peut-il faire traverser la cheminée à ses trois clients en respectant ces contraintes ?*

Solution On introduit un graphe orienté G , représenté sur la (FIG. 2.30), grâce auquel on pourra trouver une solution en appliquant l'algorithme de Marquage Orienté (FIG. 2.24).

Chaque sommet de G est noté $X|Y$ où (X, Y) est une partition du groupe des quatre personnes (Célibataire, Mari, Femme et Guide), qui représente la situation suivante : les éléments de X se trouvent en bas de la cheminée, ceux de Y en haut, et ni X ni Y n'est un tête à tête interdit.

Les arcs de G sont définis de la manière suivante : deux sommets $X|Y$ et $X'|Y'$ sont reliés par un arc si et seulement si l'on peut passer de la situation $X|Y$ à la situation $X'|Y'$ en réalisant une seule traversée de la cheminée. Remarquons que pour tout arc de G , l'arc inverse est aussi un arc de G . Pour cette raison, on peut considérer G comme un graphe non-orienté. De plus, G est un graphe biparti puisque le guide doit participer à chaque traversée de la cheminée et donc il change de côté. (Ces observations n'ont pas d'influence sur la solution.)

Une organisation des passages de la cheminée qui respecte les contraintes du guide correspond à un chemin dans G du sommet $CMFG|\emptyset$ au sommet $\emptyset|CMFG$. En exécutant l'algorithme de Marquage Orienté on obtient l'ensemble S des sommets de G qui peuvent être atteints depuis $CMFG|\emptyset$ par un chemin et une arborescence (S, F) de racine $CMFG|\emptyset$. On peut alors vérifier que $\emptyset|CMFG$ est bien dans S et l'arborescence (S, F) fournit un chemin du sommet $CMFG|\emptyset$ au sommet $\emptyset|CMFG$. Un tel chemin est indiqué sur la (FIG. 2.30) et il donne la solution suivante :

- le guide part d'abord avec le célibataire,
- il redescend seul,
- il remonte avec la femme,
- il redescend avec le célibataire,
- il remonte avec le mari,
- il redescend seul,
- il remonte avec le célibataire.

(Il reste au guide à trouver un prétexte pour faire traverser trois fois la cheminée par le célibataire!) □

Remarque 61 *L'exercice 150 est une variation du problème classique très ancien dit "Problème de l'homme, de la chèvre et du loup" (Alcuin) :*

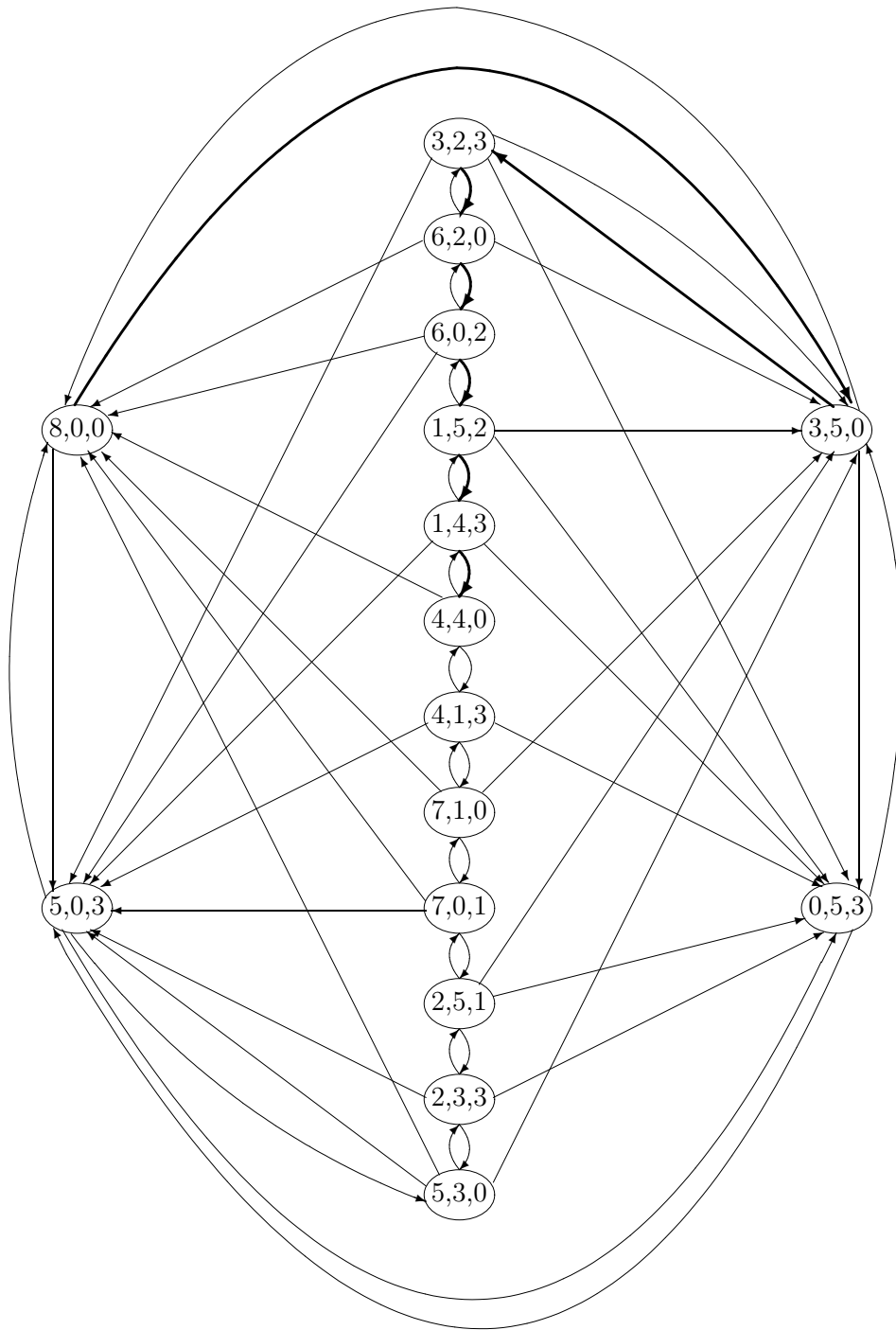


FIGURE 2.29 – Le graphe orienté G associé à l'épreuve de Bruce Willis (Exercice 149), et un chemin de $(8, 0, 0)$ à $(4, 4, 0)$.

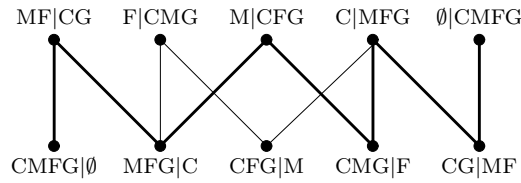


FIGURE 2.30 – Le graphe orienté G associé au problème du guide de l'Exercice 150 et un chemin qui donne une solution.

Un homme devait transporter de l'autre côté d'un fleuve un loup, une chèvre et un panier de choux. Or le seul bateau qu'il put trouver ne permettait de transporter que deux d'entre eux. Il lui a donc fallu trouver le moyen de tout transporter de l'autre côté sans aucun dommage. Dite qui peut comment il a réussi à traverser en conservant intacts le loup, la chèvre et les choux.

Exercice 151 (Caractérisation de l'existence d'une s -arborescence couvrante)

Soit s un sommet d'un graphe orienté G . Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) Pour tout sommet p de G , il existe un chemin de s à p dans G .
- (b) Pour tout sous-ensemble X de sommets de G contenant s mais pas tous les sommets de G , il existe au moins un arc de G qui sort de X .
- (c) Il existe une s -arborescence couvrante de G .

Solution (a) \implies (b) : Soit X un sous-ensemble de sommets de G qui contient s mais pas tous les sommets de G ; on peut alors choisir un sommet $p \in V(G) \setminus X$. Par (a), il existe un chemin de s à p , et d'après l'Exercice 129, il existe au moins un arc de G qui sort de X .

(b) \implies (c) : Appliquons l'algorithme de Marquage Orienté à G et s : on obtient alors une s -arborescence (S, F) . Par (b), l'étape de marquage s'est arrêtée seulement lorsque tous les sommets ont été marqués, on a donc $S = V(G)$, et (S, F) est bien une s -arborescence couvrante de G .

(c) \implies (a) : Soit H une s -arborescence couvrante de G . Par définition, H est un graphe partiel de G dont s est une racine. En conséquence, pour tout $p \in V(G) = V(H)$, il existe un chemin de s à p dans H , et donc dans G . □

Remarque 62 En inversant les sens des arcs d'un graphe orienté, par la Remarque 57, l'Exercice 151 fournit la caractérisation suivante de l'existence d'une s -anti-arborescence couvrante : pour tout sous-ensemble non-vide X de sommets de G ne contenant pas s , il existe au moins un arc de G qui sort de X .

Exercice 152 (Caractérisation d'une s -arborescence)

Soit s un sommet d'un graphe orienté G . Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) G est une s -arborescence,
- (b) s est une racine de G et G est sans cycle,
- (c) tous les sommets distincts de s sont de degré entrant égal à 1, s est de degré entrant égal à 0 et G est sans circuit,
- (d) s est une racine de G et ne l'est plus dès qu'on enlève un arc quelconque de G .

Solution (a) \implies (b) : Par définition d'une s -arborescence et d'un arbre, si on (a) alors (b) est bien vérifiée.

(b) \implies (c) : Soient n et m le nombre de sommets, respectivement d'arcs, de G . Par l'Exercice 123, $m = \sum_{v \in V(G)} d_G^-(v)$. Or dans G , par (b), tout sommet $v \neq s$, est atteignable depuis s par un chemin dont le dernier arc est un arc entrant dans v ; on a donc $d_G^-(v) \geq 1$, et par conséquent, $m \geq n - 1$. De plus, par (b), G est sans cycle, donc, par l'Exercice 86, $m \leq n - 1$. D'après ces deux inégalités, on a égalité partout, et ainsi tous les sommets distincts de s sont de degré entrant égal à 1 et le degré entrant de s est égal à 0.

Enfin, puisque G est sans cycle, il est bien évidemment sans circuit.

(c) \implies (d) : Soient S l'ensemble des sommets atteignables depuis s par un chemin dans G et \bar{S} le complément de S dans $V(G)$. Supposons par l'absurde que $\bar{S} \neq \emptyset$. Par l'Exercice 129, $\delta_G^+(\bar{S}) = \emptyset$, en d'autres termes, il n'y a aucun arc d'un sommet de S à un sommet de \bar{S} . Par conséquent, dans le sous-graphe $G[\bar{S}]$ les degrés entrants des sommets sont les mêmes que dans G , et par la première hypothèse de (c), ceux-ci sont tous égaux à 1. Ainsi, par l'Exercice 132(b), $G[\bar{S}]$ contient un circuit ce qui contredit la deuxième hypothèse de (c). On vient ainsi de démontrer que s est une racine de G .

Soit maintenant uv un arc quelconque de G . Puisque s est de degré entrant 0, $v \neq s$. Alors, par la première hypothèse de (c), dans $G - uv$: le degré entrant de v est égal à 0, il n'y a donc pas de chemin de s à v , c'est-à-dire que s n'est pas une racine.

(d) \implies (a) : Appliquons l'algorithme de Marquage Orienté à G et s : on obtient alors une s -arborescence (S, F) où S est l'ensemble des sommets atteignables depuis s par un chemin dans G et $F \subseteq A(G)$. Par la première hypothèse de (d), $S = V(G)$, et par la deuxième hypothèse de (d), $F = A(G)$. Donc $G = (S, F)$ est bien une s -arborescence. \square

Remarque 63 *En inversant les sens des arcs d'un graphe orienté, par la Remarque 57, l'Exercice 152 fournit la caractérisation suivante d'une s -anti-arborescence couvrante : tous les sommets distincts de s sont de degré sortant égal à 1, s est de degré sortant égal à 0 et G est sans circuit.*

Etant donné une s -arborescence F et un sommet $v \neq s$ de F , par l'Exercice 152(c), il y a un unique arc entrant de v dans F . Celui-ci sera noté $\mathbf{F}(v)$.

Exercice 153 *Soient F une s -arborescence, u et v deux sommets de F , P le chemin unique de s à u dans F et e un arc de F . Soit F' le graphe orienté obtenu à partir de F en rajoutant un arc uv et en supprimant l'arc e . Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) F' est une s -arborescence,
- (b) e est un arc entrant de v et P ne contient pas v .

Solution (a) \implies (b) : Puisque, par hypothèse, F et F' sont des s -arborescences contenant v , par l'Exercice 152(c), on a $d_{F'}^-(v) = d_F^-(v)$. Or l'ajout de l'arc uv augmente de 1 le degré entrant de v , il faut donc que la suppression de l'arc e diminue de 1 le degré entrant de v ; ainsi la première condition de (b) est démontrée.

Par l'Exercice 144, il existe un unique (s, v) -chemin P' dans F' dont le dernier arc doit donc être l'arc uv et par la Remarque 58, P' est élémentaire. Or par définition de F' , tous les arcs de F' à l'exception de uv sont des arcs de F ; $P' - v$ est donc un (s, u) -chemin dans F et par définition de P , on a $P = P' - v$. Puisque P' est élémentaire, $P (= P' - v)$ ne contient pas v , ainsi la deuxième condition de (b) est démontrée.

(b) \implies (a) : Puisque, par (b), e est un arc entrant de v et $F' = F + uv - e$, on a $d_F^-(w) = d_{F'}^-(w)$ pour tout sommet $w \in V(F) = V(F')$. Par définition, F est une s -arborescence et par conséquent, la condition sur les degrés entrants de l'Exercice 152(c) est satisfaite pour F et donc pour F' .

Supposons par l'absurde que F' ne soit pas une s -arborescence. Alors, par l'Exercice 152(c), F' contient un circuit C' et ainsi $P' := C' - uv$ est un (v, u) -chemin dans F' . Par $F' = F + uv - e$, F aussi contient P' . Par l'Exercice 144, il existe un (s, v) -chemin P'' dans F . La concaténation de P'' et P' est un (s, u) -chemin dans F qui est donc égal à P . Par conséquent, P contient v ce qui contredit (b). \square

Exercice 154 Soit G un graphe orienté tel que pour toute paire x et y de sommets il existe un sommet d'où x et y peuvent être atteints par des chemins. Montrer que G possède une arborescence couvrante.

Solution Pour chaque sommet u de G , on note V_u l'ensemble des sommets qui peuvent être atteints depuis u par un chemin de G . Soit r un sommet de G tel que $|V_r|$ soit maximum. Supposons qu'il existe un sommet $u \in V(G) \setminus V_r$. Alors, par l'hypothèse de l'exercice, il existe un sommet s tel que $u, r \in V_s$. Puisque la concaténation d'un chemin de s à r et d'un chemin de r à un sommet quelconque w de V_r est un chemin de s à w , on a alors $V_r \cup u \subseteq V_s$, donc $|V_r| + 1 \leq |V_s|$, ce qui contredit notre hypothèse sur r . Par conséquent, $V_r = V(G)$, c'est-à-dire que r est une racine de G , et donc, d'après l'Exercice 151, G possède une arborescence couvrante. \square

ALGORITHME CHEMIN DANS UNE ARBORESCENCE :

ENTRÉE : Une arborescence F de racine s et un sommet t de F .

SORTIE : Un (s, t) -chemin P dans F .

Étape 0 : *Initialisation.*
 $v_1 := t, P_1 := t, i := 1.$

Étape 1 : *Construction.*
 Tant que $v_i \neq s$ faire :
 $v_{i+1} := v$ où v est l'extrémité initiale de l'unique arc de F entrant en v_i ,
 $P_{i+1} :=$ la concaténation des chemins $v_{i+1}v_i$ et P_i ,
 $i := i + 1.$

Étape 2 : *Fin de l'algorithme.*
 $P := P_i, \text{ STOP.}$

FIGURE 2.31 – Algorithme Chemin dans une Arborescence.

Exercice 155 (Justification de l'algorithme Chemin dans une Arborescence (FIG. 2.31))

- (a) Montrer qu'à chaque itération de l'Étape 1, le sommet v existe.
- (b) Montrer que pour chaque i , P_i est un chemin de v_i à t .
- (c) En déduire que l'algorithme se termine et que P est un (s, t) -chemin dans F .

Solution (a) D'après l'Exercice 152(c), dans F , tous les sommets distincts de s ont exactement un arc entrant. Or à l'Étape 1, $v_i \neq s$, d'où l'existence de v .

(b) On va montrer (b) en raisonnant par récurrence sur i . Pour $i = 1$, P_1 est un chemin de v_1 à t . Supposons maintenant que la propriété est vérifiée pour i : P_i est un chemin de v_i à t .

Par conséquent, P_{i+1} , qui est égal à la concaténation des chemins $v_{i+1}v_i$ et P_i , est un chemin de v_{i+1} à t .

(c) Soit i une itération de l'Étape 1 au cours de l'exécution de l'algorithme.

Par (b), P_i est un chemin de v_i à t . Si $v_i \neq s$ alors par (a), le sommet v_{i+1} existe. Par l'Exercice 152(c), F est sans circuit et donc v_{i+1} n'appartient pas à P_i (sinon il existerait $j < i$ tel que $v_{i+1} = v_j$ et alors $P_i[v_i, v_j] + v_jv_i$ serait un circuit). Le nombre n de sommets de F étant fini, l'algorithme s'arrête après au plus n itérations avec $v_i = s$ et donc par (b), P est un (s, t) -chemin dans F . \square

Remarque 64 *L'algorithme Chemin dans une Arborescence est en fait l'algorithme Modifié de Marquage Orienté appliqué au graphe orienté F et au sommet t .*

ALGORITHME CHEMIN :

ENTRÉE : Un graphe orienté G et deux sommets distincts s et t de G .

SORTIE : Un (s, t) -chemin P de G ou un certificat Q qu'il n'y en a pas.

Étape 1 : *Marquage.*
Exécuter l'algorithme de Marquage Orienté sur G et s pour obtenir l'ensemble S des sommets qui peuvent être atteints depuis s par un chemin dans G , et un ensemble F d'arcs de G tel que (S, F) soit une s -arborescence.

Étape 2 : *Construction.*
Si $t \in S$, alors exécuter l'algorithme Chemin dans une Arborescence sur (S, F) et t pour obtenir un (s, t) -chemin P , STOP.

Étape 3 : *Certificat.*
Si $t \notin S$, alors $Q := S$ et STOP.

FIGURE 2.32 – Algorithme Chemin.

Exercice 156 (Justification de l'algorithme Chemin (FIG. 2.32)) *Montrer que pour s et t , deux sommets distincts d'un graphe orienté G , l'algorithme Chemin s'arrête avec un (s, t) -chemin P de G ou un ensemble Q de sommets de G , contenant s et pas t , sans arc sortant.*

Solution Par l'Exercice 145, l'Étape 1 s'arrête avec une s -arborescence (S, F) où S est l'ensemble des sommets qui peuvent être atteints depuis s par un chemin dans G et F est un ensemble d'arcs de G . Si $t \in S$, alors par l'Exercice 155(c), l'algorithme s'arrête à la fin de l'Étape 2 avec un (s, t) -chemin dans (S, F) et donc dans G . Sinon, l'algorithme s'arrête à l'Étape 3 avec $Q = S$ et par l'Exercice 146(a), $\delta_G^+(S) = \emptyset$. Par l'Exercice 129, Q est un certificat de la non-existence d'un (s, t) -chemin dans G . \square

2.5 Algorithmes spécifiques de Marquage Orienté

Exercice 157 *Exécuter l'algorithme de Recherche en Largeur d'Abord (FIG. 2.33) sur le graphe orienté de la FIG. 2.25.*

Solution Une exécution de l'algorithme de Recherche en Largeur d'Abord sur le graphe orienté de la FIG. 2.25 est illustrée FIG. 2.34 : les sommets sont numérotés et les arcs dans A_i sont en gras. \square

ALGORITHME DE RECHERCHE EN LARGEUR D'ABORD :

ENTRÉE : Un graphe orienté G et un sommet s de G .

SORTIE : L'ensemble S des sommets qui peuvent être atteints depuis s par un chemin dans G , une numérotation $u_1, \dots, u_{|S|}$ des éléments de S qui indique l'ordre d'exploration des sommets par l'algorithme et un ensemble F d'arcs de G tel que (S, F) soit une s -arborescence.

Étape 0 : *Initialisation.*
 $u_1 := \{s\}, S_1 := \{u_1\}, A_1 := \emptyset, i := 1$ et $j := 1$.

Étape 1 : *Exploration d'un sommet.*
 Tant qu'il existe un arc $u_i v$ de G tel que $v \notin S_j$ faire :
 $u_{j+1} := v,$
 $S_{j+1} := S_j \cup \{u_{j+1}\},$
 $A_{j+1} := A_j \cup \{u_i u_{j+1}\},$
 $j := j + 1.$

Étape 2 : *Choix du prochain sommet.*
 Si $i + 1 \leq j$ alors faire
 $i := i + 1,$
 aller à l'Étape 1.

Étape 3 : *Fin de l'algorithme.*
 $S := S_j, F := A_j, \text{STOP}.$

FIGURE 2.33 – Algorithme de Recherche en Largeur d'Abord.

Remarque 65 *Beaucoup d'auteurs francophones utilisent la dénomination anglo-saxonne "BFS" (pour Breadth First Search) à la place de "Algorithme de Recherche en Largeur d'Abord".*

Remarque 66 *On note que l'Algorithme de Recherche en Largeur d'Abord est une version de l'Algorithme de Marquage dans laquelle l'extrémité initiale de l'arc à choisir à l'Étape 1 est imposée. Les règles utilisées sont les suivantes :*

- *étant donné un sommet marqué, on considère consécutivement tous ses arcs sortants en vue d'un marquage (exploration du sommet),*
- *les sommets sont explorés dans l'ordre dans lequel ils ont été marqués (choix du prochain sommet).*
- *l'algorithme s'arrête lorsque tous les sommets marqués ont été explorés.*

Remarque 67 *L'Algorithme de Recherche en Largeur d'Abord est utilisé dans la résolution de certains problèmes de plus courts chemins, voir l'Exercice 216. Plus précisément, on verra que la s -arborescence (S, F) produite par cet algorithme est telle que : pour chaque sommet v de S , le (s, v) -chemin dans (S, F) a la propriété d'être un (s, v) -chemin dans G ayant un nombre minimum d'arcs.*

Etant donné un entier positif k , une fonction ℓ définie sur un ensemble S est dite **numérotation de S à partir de k** si elle attribue à chaque élément de S un entier distinct entre k et $k + |S| - 1$. On dira que le sommet v est de **ℓ -numéro i** (ou **numéro i** s'il n'y a pas d'ambiguïté) si $\ell(v) = i$.

Exercice 158 *Exécuter l'algorithme de Recherche en Profondeur d'Abord (FIG. 2.35) sur le graphe orienté de la FIG. 2.25.*

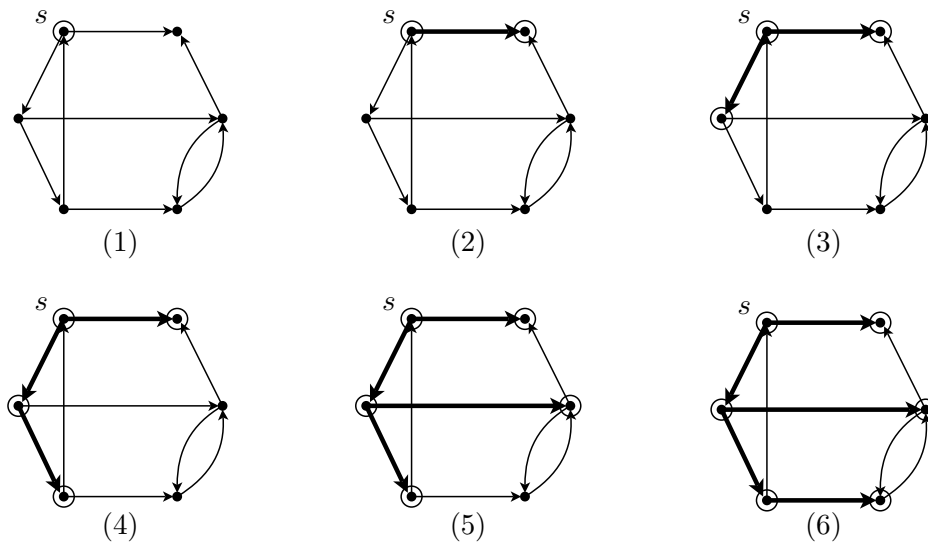


FIGURE 2.34 – Les différentes étapes d’une exécution de l’algorithme de Recherche en Largeur d’Abord sur le graphe orienté de la FIG. 2.25.

Solution Une exécution de l’algorithme de Recherche en Profondeur d’Abord sur le graphe orienté de la FIG. 2.25 est illustrée FIG. 2.36 : les sommets sont numérotés et les arcs dans A_i sont en gras. □

Remarque 68 *Beaucoup d’auteurs francophones utilisent la dénomination anglo-saxonne "DFS" (pour Depth First Search) à la place de "Algorithme de Recherche en Profondeur d’Abord".*

Remarque 69 *Lors de l’exécution de l’Algorithme de Recherche en Profondeur d’Abord, entre le moment où un sommet v est marqué et numéroté $\ell(v)$ et le moment où il y a une marche arrière depuis v , on effectue les mêmes opérations qu’une exécution de l’Algorithme de Recherche en Profondeur d’Abord avec pour données $G - \{w' : \ell(w') < \ell(v)\}$ et v , en numérotant à partir de $\ell(v)$ (c’est-à-dire en affectant la valeur $\ell(v)$ à la variable i à l’Étape d’Initialisation).*

Exercice 159 (Justification de l’algorithme Recherche en Profondeur d’Abord (FIG. 2.35)) *Montrer que l’Algorithme de Recherche en Profondeur d’Abord*

- (a) *se termine,*
- (b) *construit un ensemble S de sommets de G sans arc sortant,*
- (c) *a une sortie qui vérifie les propriétés décrites sur la (FIG. 2.35).*

Solution On montrera que l’Algorithme de Recherche en Profondeur d’Abord (FIG. 2.35) est une version particulière de l’Algorithme de Marquage Orienté (FIG. 2.24) dans laquelle l’extrémité initiale u de l’arc à choisir à l’Étape 1 est imposée.

(a) On remarque que la suite des valeurs prises par le sommet courant u au cours d’une exécution de l’algorithme est telle que :

- cette suite ne contient que des sommets marqués (c’est-à-dire dans S), elle commence et se termine par s ,
- pour un sommet marqué donné x , seule la dernière occurrence de x ne correspond pas à un marquage.

ALGORITHME DE RECHERCHE EN PROFONDEUR D'ABORD :

ENTRÉE : Un graphe orienté G , un sommet s de G .

SORTIE : L'ensemble S des sommets qui peuvent être atteints depuis s par un chemin dans G , un ensemble F d'arcs de G tel que (S, F) soit une s -arborescence, une numérotation ℓ de S à partir de 1, et une fonction père $p(\cdot)$ qui associe à chaque sommet de S distinct de s , son unique voisin entrant dans l'arborescence (S, F) .

Étape 0 : *Initialisation.*
 $i := 1, S_i := \{s\}, A_i := \emptyset, \ell(s) := i, u := s.$

Étape 1 : *Parcours du graphe orienté.*
 S'il existe un arc uv de G tel que $v \notin S_i$ alors aller à l'Étape 2,
 sinon si $u \neq s$ alors aller à l'Étape 3,
 sinon aller à l'Étape 4.

Étape 2 : *Marquage.*
 $S_{i+1} := S_i \cup \{v\},$
 $A_{i+1} := A_i \cup \{uv\},$
 $\ell(v) := i + 1,$
 $p(v) := u,$
 $u := v,$
 $i := i + 1,$
 Aller à l'Étape 1.

Étape 3 : *Marche arrière.*
 $u := p(u),$
 Aller à l'Étape 1.

Étape 4 : *Fin de l'algorithme.*
 $S := S_i$ et $F := A_i$, STOP.

FIGURE 2.35 – Algorithme de Recherche en Profondeur d'Abord.

Le nombre de marquages possibles étant fini, l'algorithme se termine.

(b) Supposons qu'à la fin de l'algorithme on ait un sommet v dans S et un arc vw de G tels que $w \notin S$. Puisque v est dans S , v apparaît dans la suite des valeurs prises par le sommet courant et sa dernière occurrence dans la liste correspond à une marche arrière depuis v : mais alors plus aucun marquage n'est possible depuis v et ceci contredit notre hypothèse sur l'arc vw .

(c) Par (a) et (b), lorsque l'Algorithme de Recherche en Profondeur d'Abord se termine, les ensembles S et F obtenus auraient pu l'être par une exécution de l'Algorithme de Marquage Orienté. Par l'Exercice 146(b) et (c), S est l'ensemble des sommets qui peuvent être atteints depuis s par un chemin dans G et (S, F) est une s -arborescence. Par définition de l'Étape de Marquage, les sommets sont ℓ -numérotés selon l'ordre dans lequel ils sont marqués, et pour chaque sommet v dans $S \setminus \{s\}$, $p(v)$ est l'unique voisin entrant de v dans (S, F) . \square

Soient (S, F) un sous-graphe partiel de $G = (V, A)$ et ℓ une numérotation de S à partir de k , pour un entier k quelconque. On dit que $((S, F), \ell)$ est une **RPA-arborescence de G numérotée** s'il existe une exécution de l'Algorithme de Recherche en Profondeur d'Abord avec pour entrée G et le sommet de ℓ -numéro k , telle que la sortie obtenue soit $((S, F), \ell')$ avec $\ell' = \ell - k + 1$ (ℓ' numérote les sommets dans le même ordre que ℓ mais à partir de 1). On remarque qu'en remplaçant dans l'Algorithme de Recherche en Profondeur d'Abord, à la phase

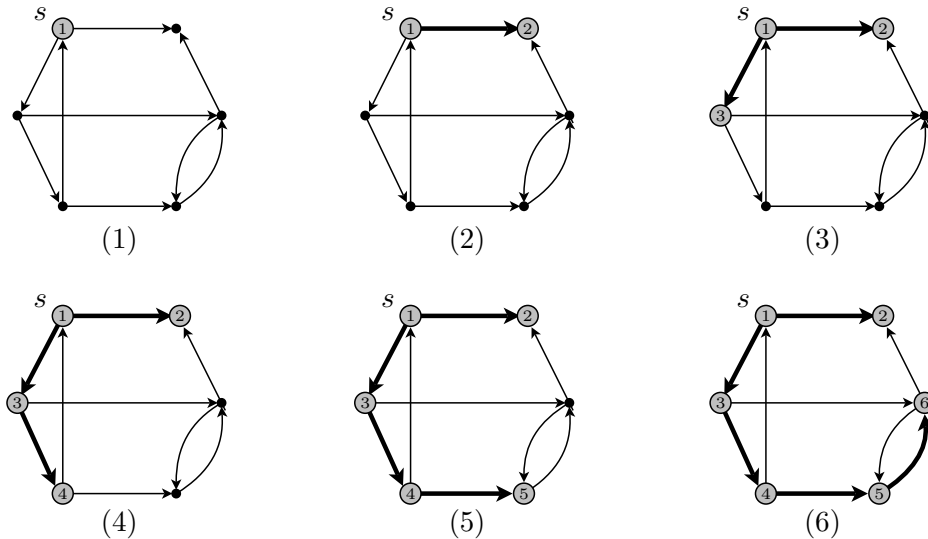


FIGURE 2.36 – Les différentes étapes d’une exécution de l’algorithme de Recherche en Profondeur d’Abord sur le graphe orienté de la FIG. 2.25.

d’initialisation, l’instruction $i := 1$ par $i := k$ on obtient une numérotation de S à partir de k . On dit que (S, F) est une **RPA-arborescence de G** s’il existe une numérotation ℓ de S telle que $((S, F), \ell)$ soit une RPA-arborescence de G numérotée.

Exercice 160 Soient $H = (S, F)$ une arborescence d’un graphe orienté $G = (V, A)$ et ℓ une numérotation de S à partir de 1. Montrer que (H, ℓ) est une RPA-arborescence de G numérotée si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites pour tout $w \in S$:

- $H^{[w]}$ contient tous les successeurs de w dans $G - \{w' : \ell(w') < \ell(w)\}$,
- la restriction de ℓ aux sommets de $H^{[w]}$ est une numérotation à partir de $\ell(w)$.

Solution Montrons d’abord que les conditions sont nécessaires. Supposons donc que (H, ℓ) ait été obtenu comme sortie d’une exécution de l’Algorithme de Recherche en Profondeur d’Abord avec pour entrée G et s . Pour tout $w \in S$, par la Remarque 69 et l’Exercice 159, on a marqué tous les sommets accessibles depuis w dans $G - \{w' : \ell(w') < \ell(w)\}$ et (a) et (b) sont bien vérifiées.

Nous montrons maintenant, par récurrence sur le nombre de sommets de H , que les conditions sont suffisantes. S’il y a un seul sommet x dans H alors H ne contient pas d’arcs et $\ell(x) = 1$. Puisque (H, ℓ) vérifie (a), il n’y a dans G aucun arc sortant de x , et (H, ℓ) est alors la sortie de l’Algorithme de Recherche en Profondeur d’Abord avec pour données G et x .

Supposons maintenant que le résultat est vrai pour toute arborescence à $n - 1$ sommets ($n > 1$) munie d’une numérotation qui satisfait les hypothèses de l’exercice. Soient $H = (S, F)$ une arborescence à n sommets de G et ℓ une numérotation de S à partir de 1 satisfaisant les conditions (a) et (b).

Par (b), le sommet x de ℓ -numéro 1 est la racine de H , et pour le sommet y de ℓ -numéro n , $H^{[y]} = y$. Comme $n > 1$, $y \neq x$ et donc par l’Exercice 152(c), y a un unique prédécesseur z dans H . Par $H^{[y]} = y$ et l’Exercice 143, $H - y$ est une arborescence de $G - y$; et puisque, de plus, y est de ℓ -numéro maximum dans H , $H - y$ et la numérotation ℓ restreinte à $S \setminus \{y\}$ vérifient (a) et (b) dans $G - y$. Donc par l’hypothèse de récurrence, il existe une exécution de l’Algorithme de Recherche en Profondeur d’Abord ayant pour entrée $G - y$ et le sommet x , dont la sortie est $((H - y), \ell' = \ell|_{S \setminus \{y\}})$.

Si l'Algorithme de Recherche en Profondeur d'Abord, ayant pour entrée G et x , peut s'effectuer de la même manière que pour $G - y$ et x jusqu'à l'itération t où plus aucun marquage n'était possible à partir de z , alors au lieu de faire marche arrière ou de s'arrêter, l'algorithme rajouterait y à l'ensemble des sommets marqués, poserait $\ell'(y) := n$ et $p(y) := z$, le sommet courant deviendrait égal à y , par (a) il n'existe pas d'arc sortant de y vers un sommet non ℓ -numéroté, l'algorithme ferait alors marche arrière et le nouveau sommet courant deviendrait égal à z , ensuite l'algorithme poursuivrait de la même manière que dans $G - y$ et le résultat de cette exécution serait bien $(H, \ell' = \ell)$.

Il ne reste donc plus qu'à montrer que le comportement de l'algorithme peut être le même dans G et dans $G - y$ jusqu'à l'itération t . Un marquage possible dans $G - y$ reste possible dans G , par contre il faut vérifier que toutes les marches arrières restent autorisées, c'est-à-dire que tout sommet depuis lequel on avait fait marche arrière avant l'itération t n'est pas un prédécesseur de y . Supposons au contraire qu'il existe w un sommet prédécesseur de y dans G pour lequel l'exécution de l'algorithme dans $G - y$ a fait marche arrière avant l'itération t . Par (a) on a que y est dans $H^{[w]}$, et donc z qui est l'unique prédécesseur de y dans H est dans $(H - y)^{[w]}$. Par la Remarque 69, une marche arrière depuis w ne peut avoir lieu qu'après une marche arrière depuis tous les sommets de $(H - y)^{[w]}$ distincts de w ; on obtient une contradiction à notre hypothèse selon laquelle on a fait marche arrière depuis w avant de faire marche arrière depuis z . \square

ALGORITHME DE RECHERCHE COMPLÈTE EN PROFONDEUR D'ABORD :

ENTRÉE : Un graphe orienté $G = (V, A)$.

SORTIE : Une forêt d'arborences (V, F) et une numérotation ℓ de V de 1 à $|V|$.

Étape 0 : *Initialisation.*
 $F := \emptyset, G_1 := G, i := 1$.

Étape 1 : *Parcours du graphe orienté.*
 Si $V(G_i) \neq \emptyset$ alors faire
 Choisir un sommet $s_i \in V(G_i)$,
 Exécuter l'Algorithme de Recherche en Profondeur d'Abord pour G_i et s_i
 pour obtenir $S_i \subseteq V(G_i)$, une numérotation ℓ_i de S_i de 1 à $|S_i|$
 et $F_i \subseteq A(G_i)$,
 $F := F \cup F_i$,
 pour chaque $v \in S_i$ on pose $\ell(v) := \ell_i(v) + |V(G)| - |V(G_i)|$,
 $G_{i+1} := G_i - S_i$.
 $i := i + 1$,
 Aller à l'Étape 1.

Étape 2 : *Fin de l'algorithme.*
 STOP avec $((V, F), \ell)$.

FIGURE 2.37 – Algorithme de Recherche Complète en Profondeur d'Abord.

Exercice 161 Exécuter l'algorithme de Recherche Complète en Profondeur d'Abord (FIG. 2.37) sur le graphe orienté de la FIG. 2.38.

Solution Une exécution de l'algorithme de Recherche Complète en Profondeur d'Abord sur le graphe orienté de la FIG. 2.38 est illustrée FIG. 2.39 : les sommets sont numérotés et les arcs dans F_i sont en gras.

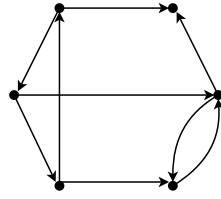


FIGURE 2.38 – Graphe orienté de l’Exercice 161.

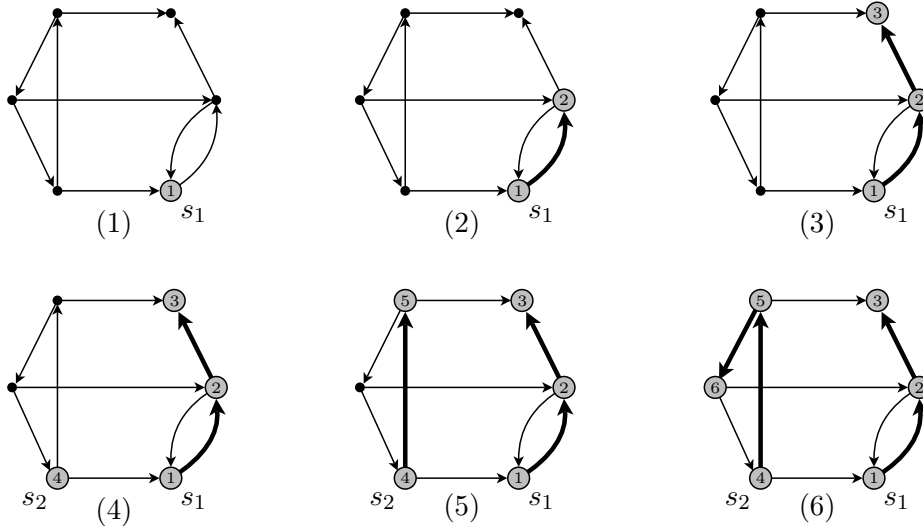


FIGURE 2.39 – Les différentes étapes d’une exécution de l’algorithme de Recherche Complète en Profondeur d’Abord sur le graphe orienté de la FIG. 2.38.

□

Soient (V, F) un graphe partiel d’un graphe orienté $G = (V, A)$ et ℓ une numérotation de V à partir de 1. On dit que $((V, F), \ell)$ est une **RCPA-forêt d’arborences de G numérotée** s’il existe une exécution de l’Algorithme de Recherche Complète en Profondeur d’Abord (FIG. 2.37), avec pour entrée G et le sommet de ℓ -numéro 1, telle que la sortie obtenue soit (V, F) et ℓ . On dit que (V, F) est une **RCPA-forêt d’arborences de G** s’il existe une numérotation ℓ de V telle que $((V, F), \ell)$ soit une RCPA-arborescence de G numérotée.

Remarque 70 Soient (V, F) une forêt d’arborences de $G = (V, A)$, ℓ une numérotation de V à partir de 1. Par la définition de l’Algorithme de Recherche Complète en Profondeur d’Abord (FIG. 2.37), $((V, F), \ell)$ est une RCPA-forêt d’arborences de G numérotée si et seulement si chaque composante connexe (V', F') de (V, F) de racine r munie de la numérotation $\ell|_{V'}$ est une RPA-arborescence de $G - \{v : \ell(v) < \ell(r)\}$, numérotée à partir de $\ell(r)$.

Exercice 162 Soient $H = (V, F)$ une forêt d’arborences d’un graphe orienté $G = (V, A)$ et ℓ une numérotation de $V(G)$. Montrer que (H, ℓ) est une RCPA-forêt d’arborences de G numérotée si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites pour tout $w \in V$:

- (a) $H^{[w]}$ contient tous les successeurs de w dans $G - \{w' : \ell(w') < \ell(w)\}$,
- (b) la restriction de ℓ aux sommets de $H^{[w]}$ est une numérotation à partir de $\ell(w)$.

Solution Par la Remarque 70, il suffit d’observer que les conditions (a) et (b) de l’Exercice 162 sont vérifiées par ℓ dans G si et seulement si pour toute arborescence (V', F') de (V, F) de racine

r , la numérotation $\ell' = \ell|_{V'} - \ell(r) + 1$ vérifie les conditions de l'Exercice 160 dans le graphe orienté $G - \{v : \ell(v) < \ell(r)\}$. \square

Remarque 71 *L'Algorithme de Recherche Complète en Profondeur d'Abord est utilisé dans la résolution de certains problèmes de connexité des graphes orientés, voir l'Exercice 189.*

2.6 Arborescences : paquage et recouvrement

Exercice 163 (Théorème d'Edmonds)

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté, r un sommet de G et $k \geq 2$ un entier.

(a) Montrer que si G possède k r -arborescences couvrantes arc-disjointes, alors

$$\begin{aligned} &\text{pour tout sous-ensemble non-vide } X \text{ de } V \setminus \{r\}, \\ &\text{au moins } k \text{ arcs de } G \text{ entrent dans } X. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Dans la suite de l'exercice on suppose que (2.11) est satisfaite.

Soit (U, F) un sous-graphe partiel de G qui est maximal¹ pour les propriétés suivantes :

$$(U, F) \text{ est une } r\text{-arborescence,} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} &\text{pour tout sous-ensemble non-vide } X \text{ de } V \setminus \{r\}, \\ &\text{au moins } k - 1 \text{ arcs de } G - F \text{ entrent dans } X. \end{aligned} \quad (2.13)$$

On suppose que U est strictement inclus dans V .

Un sous-ensemble Z de sommets de G sera dit **dangereux** si Z ne contient pas r , n'est pas inclus dans U et exactement $k - 1$ arcs de $G - F$ entrent dans Z .

- (b) Montrer que tout arc sortant de U entre dans un ensemble dangereux.
- (c) Montrer que G possède un ensemble dangereux minimal Z .
- (d) Montrer que G possède un arc uv de $Z \cap U$ à $Z \setminus U$.
- (e) Montrer que uv entre dans un ensemble dangereux Y .
- (f) Montrer que $Z \cap Y$ est un ensemble dangereux.
- (g) Conclure que $U = V$.
- (h) Conclure que G possède k r -arborescences couvrantes arc-disjointes si et seulement si (2.11) est satisfaite.

Solution (a) Supposons que G possède k r -arborescences couvrantes arc-disjointes R_1, \dots, R_k . Soit X un sous-ensemble non-vide de $V \setminus \{r\}$. Par l'Exercice 151, appliqué à la r -arborescence couvrante R_i ($i = 1, \dots, k$) et à l'ensemble $V \setminus X$, il existe un arc e_i de R_i qui sort de $V \setminus X$ et donc entre dans X . Puisque les R_i sont arc-disjointes, les arcs e_i sont distincts. Par conséquent, (2.11) est satisfaite.

(b) Soit uv un arc sortant de U . Par définition de U , uv n'est pas dans F . Par l'Exercice 142, le graphe orienté obtenu à partir de (U, F) en rajoutant le sommet v et l'arc uv est une r -arborescence et ainsi satisfait (2.12). Donc $F \cup \{uv\}$, par la maximalité de (U, F) , ne satisfait pas (2.13), c'est-à-dire qu'il existe un sous-ensemble X de V , non-vide, ne contenant pas r , et tel

1. Maximal signifie ici qu'en ajoutant un sommet ou un arc de G à (U, F) le graphe orienté obtenu viole l'une des deux propriétés (2.12) et (2.13).

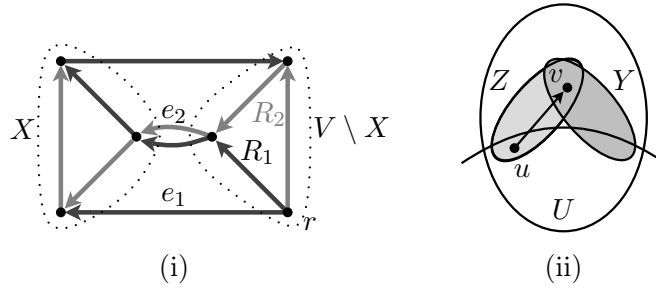


FIGURE 2.40 – Illustration de la solution de l'Exercice 163(a) - (f).

qu'au plus $k - 2$ arcs de $G - (F \cup \{uv\})$ entrent dans X . Puisque, par (2.13), au moins $k - 1$ arcs de $G - F$ entrent dans X , on a que uv et exactement $k - 2$ autres arcs de $G - F$ entrent dans X . Comme X contient le sommet v qui n'est pas dans U , c'est un ensemble dangereux dans lequel uv entre.

(c) Puisque $r \in U \subset V$, par (2.13) appliqué à $V \setminus U$, il existe au moins un arc qui sort de U . Par (b), cet arc entre dans un ensemble dangereux. L'ensemble des ensembles dangereux n'est donc pas vide et par conséquent il existe un ensemble dangereux minimal.

(d) Puisque Z est dangereux, $Z \setminus U$ n'est pas vide et ne contient pas r ; par (2.11), on a donc au moins k arcs de G qui entrent dans $Z \setminus U$. De plus, puisque $Z \setminus U$ est disjoint de l'ensemble U des sommets de F , le degré entrant de $Z \setminus U$ est le même dans $G - F$ que dans G , c'est-à-dire au moins k . Or tout arc de $G - F$ entrant dans $Z \setminus U$ vient soit de $V \setminus Z$ (au plus $k - 1$ car Z est dangereux) soit de $Z \cap U$. Par conséquent, il existe au moins un arc de $Z \cap U$ à $Z \setminus U$.

(e) Puisque, par définition l'arc uv sort de U , par (b), il entre dans un ensemble dangereux Y .

(f) Les ensembles Y et Z contiennent v qui n'est pas dans U , donc $Y \cap Z$ et $Y \cup Z$ sont non-vides et ne sont pas inclus dans U . De plus, puisque Y et Z sont dangereux, ils ne contiennent pas r et exactement $k - 1$ arcs de $G - F$ entrent dans chacun d'eux. En conséquence, on a aussi que $Y \cap Z$ et $Y \cup Z$ ne contiennent pas r . Donc par (2.13), au moins $k - 1$ arcs de $G - F$ entrent dans chacun d'eux. Par (2.5) de l'Exercice 126 appliqué à $G - F$, Y et Z , on a

$$\begin{aligned} (k - 1) + (k - 1) &= d_{G-F}^-(Y) + d_{G-F}^-(Z) \\ &\geq d_{G-F}^-(Y \cap Z) + d_{G-F}^-(Y \cup Z) \\ &\geq (k - 1) + (k - 1). \end{aligned}$$

Par conséquent, $d_{G-F}^-(Y \cap Z) = k - 1$ et ainsi l'ensemble $Y \cap Z$ est dangereux (de même que l'ensemble $Y \cup Z$).

(g) Par (c), G possède un ensemble dangereux minimal Z . Par (d), il existe un arc uv de $Z \cap U$ à $Z \setminus U$. Par (e), uv entre dans un ensemble dangereux Y . Alors par (f), $Z \cap Y$ est un ensemble dangereux, strictement inclus dans Z car u appartient à Z mais pas à Y . Ceci contredit le fait que Z est un ensemble dangereux minimal. On en conclut que si $U \subset V$ alors on aboutit à une contradiction, d'où $U = V$.

(h) Montrons tout d'abord que la condition est nécessaire. Supposons donc que G possède k r -arborescences couvrantes arc-disjointes. Par (a), (2.11) est satisfaite.

Pour montrer que la condition est suffisante supposons que (2.11) soit satisfaite. Soit (U, F) un sous-graphe partiel maximal de G qui satisfait (2.12) et (2.13). Un tel sous-graphe partiel existe car (r, \emptyset) satisfait (2.12) et (2.13).

Par (g), $U = V$, et alors, par (2.12), $R_k = (U, F)$ est une r -arborescence couvrante de G . On va raisonner par récurrence sur k . Si $k = 2$, alors puisque (2.13) est satisfaite, par l'Exercice 151, $G - F$ possède une r -arborescence couvrante R_1 . Ainsi R_1 et R_2 sont deux r -arborescences couvrantes de G arc-disjointes, donc pour $k = 2$, (b) est démontré. On suppose maintenant que $k \geq 3$ et que (b) est vrai pour $k - 1$, c'est-à-dire que, puisque (2.13) est satisfaite, $G - F$ possède $k - 1$ r -arborescences couvrantes R_1, \dots, R_{k-1} . Ainsi R_1, \dots, R_{k-1}, R_k sont k r -arborescences couvrantes de G arc-disjointes. \square

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté et k un entier. On appelle **recouvrement des arcs de G par k forêts d'arborescences** un ensemble de k sous-ensembles d'arcs de G , A_1, \dots, A_k , dont l'union est égale à A et tel que chaque graphe partiel (V, A_i) de G est une forêt d'arborescences.

Exercice 164 (Théorème de Frank)

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté et $k \geq 2$ un entier.

(a) Montrer que s'il existe un recouvrement des arcs de G par k forêts d'arborescences, alors

$$d^-(v) \leq k \quad \text{pour tout } v \in V, \quad (2.14)$$

$$|A(G[X])| \leq k(|X| - 1) \quad \text{pour tout } X \subseteq V, X \neq \emptyset. \quad (2.15)$$

Dans la suite de l'exercice on suppose que (2.14) et (2.15) sont satisfaites.

On considère le graphe orienté H obtenu à partir de G en ajoutant un nouveau sommet r et $k - d_G^-(v)$ nouveaux arcs de r à v pour chaque sommet v de G .

(b) Montrer que dans H tous les sommets distincts de r sont de degré entrant égal à k .

(c) Montrer que le graphe partiel de G obtenu en enlevant le sommet r d'une r -arborescence couvrante de H est une forêt d'arborescences.

(d) Montrer que (2.11) est satisfaite pour H , r et k .

(e) Montrer qu'il existe une partition des arcs de H par k r -arborescences couvrantes de H .

(f) Conclure qu'il existe un recouvrement des arcs de G par k forêts d'arborescences si et seulement si (2.14) et (2.15) sont satisfaites.

Solution (a) Supposons qu'il existe un recouvrement des arcs de G par k forêts d'arborescences A_1, \dots, A_k .

Soit v un sommet quelconque de G . Pour $i = 1, \dots, k$, puisque (V, A_i) est une forêt d'arborescences, sa composante connexe qui contient v est une arborescence et alors par l'Exercice 152(c), au plus un arc de A_i entre dans v . Comme tout arc de G appartient à au moins un A_i , le degré entrant de v dans G est au plus la somme pour i allant de 1 à k du nombre d'arcs de A_i entrant dans v , cette somme est au plus k par l'argument précédent et ainsi (2.14) est satisfaite.

Soit X un sous-ensemble non-vide quelconque de V . Pour $i = 1, \dots, k$, soit A'_i l'ensemble des arcs de A_i dont les deux extrémités sont dans X . Puisque (V, A_i) est une forêt d'arborescences, par l'Exercice 152(b), (V, A_i) ne contient pas de cycle (au sens non-orienté) et donc (X, A'_i) non plus, et ainsi, par l'Exercice 85, $|A'_i| \leq |X| - 1$. Comme tout arc de G appartient à au moins un A_i , le nombre d'arcs de G inclus dans X est au plus la somme sur i du nombre d'arcs de A_i inclus dans X , soit $\sum_{i=1}^k |A'_i|$. Cette somme est au plus $k(|X| - 1)$ par l'argument précédent et ainsi (2.15) est satisfaite.

(b) Soit v un sommet quelconque de V . Par (2.14), $k - d_G^-(v) \geq 0$ et ainsi H est bien défini. Par construction, $d_H^-(v) = d_G^-(v) + (k - d_G^-(v)) = k$.

(c) Soient R une r -arborescence couvrante de H , S une composante connexe quelconque de $R - r$. Puisque R est connexe, il existe dans R au moins un arc entre r et S , et puisque R est

sans cycle il en existe au plus un. En conséquence, il existe dans R exactement un arc entre r et un sommet s de S . Puisque R est une r -arborescence, par l'Exercice 152, tous les sommets de R distincts de r sont de degré entrant égal à 1 et R est sans circuit. Selon ce qui précède, la même propriété est vérifiée pour S et s . Donc, d'après l'Exercice 152, S est une s -arborescence. On en conclut que $R - r$ est une forêt d'arborescences.

(d) Soit X un sous-ensemble non-vide quelconque de $V(H) \setminus \{r\} = V$. Par (2.1) de l'Exercice 124, dans H le degré entrant de X est égal à la somme des degrés entrants des sommets de X moins le nombre d'arcs inclus dans X . Par (b), tous les sommets de X sont de degré entrant égal à k dans H . Puisque r n'est pas dans X et par la construction de H , l'ensemble des arcs inclus dans X est le même dans H et dans G , et par (2.15), le cardinal de cet ensemble est inférieur ou égal à $k(|X| - 1)$. En conséquence,

$$\begin{aligned} d_H^-(X) &= \sum_{v \in X} d_H^-(v) - |A(H[X])| \\ &= \sum_{v \in X} k - |A(G[X])| \\ &\geq k|X| - k(|X| - 1) \\ &= k \end{aligned}$$

et ainsi (2.11) est satisfaite pour H , r et k .

(e) Par (d) et l'Exercice 163(h), H possède k r -arborescences couvrantes arc-disjointes. Il nous reste à montrer que tout arc de H appartient à l'une d'elles. Par l'Exercice 123, le nombre d'arcs de H est égal à la somme des degrés entrants des sommets de H . Or, d'après (b), chaque sommet de V est de degré entrant égal à k , et par la construction de H , r est de degré entrant nul. D'où,

$$\begin{aligned} |A(H)| &= \sum_{v \in V(H)} d^-(v) \\ &= d^-(r) + \sum_{v \in V} d^-(v) \\ &= 0 + \sum_{v \in V} k \\ &= k|V|. \end{aligned}$$

De plus, par l'Exercice 84, les k r -arborescences couvrantes arc-disjointes de H contiennent en tout $k(|V(H)| - 1) = k|V|$ arcs distincts, c'est-à-dire le même nombre d'arcs que H . En conséquence, on a bien une partition des arcs de H par k r -arborescences couvrantes de H .

(f) Par (a), les conditions (2.14) et (2.15) sont nécessaires à l'existence d'un recouvrement des arcs de G par k forêts d'arborescences.

Pour montrer que les conditions sont suffisantes supposons qu'elles soient satisfaites. Par (e), il existe une partition (donc un recouvrement) des arcs de H par k r -arborescences couvrantes de H . Par (c), en enlevant le sommet r , on obtient un recouvrement des arcs de G par k forêts d'arborescences. \square

2.7 Arborescence couvrante de coût minimum

Étant donné un graphe orienté $G = (V, A)$, une **fonction de coût sur les arcs** de G , $c : A \rightarrow \mathbb{R}$, est l'affectation d'une valeur $c(e)$ à chaque arc e de G . Soit F un sous-ensemble

quelconque d'arcs de G . On définit le **c -coût de F** (ou **coût** s'il n'y a pas d'ambiguïté), noté $c(F)$, comme la somme des coûts des arcs de F :

$$c(F) = \sum_{e \in F} c(e).$$

Par extension, le **c -coût du graphe orienté G** , noté $c(G)$, est égal au c -coût de l'ensemble A de ses arcs.

Dans cette section nous nous intéressons à la recherche d'une s -arborescence couvrante de G de c -coût minimum.

Remarque 72 *Si s est une racine de G alors, par l'Exercice 151, le nombre d'arborescences couvrantes de G est non-nul, et ce nombre est bien évidemment fini. Par conséquent, le coût minimum d'une arborescence couvrante de G est bien défini.*

Exercice 165 *Soient G un graphe orienté, s un sommet de G , C un circuit élémentaire de G qui ne contient pas s et G' le graphe orienté obtenu à partir de G en contractant C .*

- (a) *Montrer que si F est une s -arborescence couvrante de G , alors le graphe orienté F' obtenu à partir de F en contractant C contient une s -arborescence couvrante de G' .*
- (b) *Montrer que si F' est une s -arborescence couvrante de G' , alors le graphe partiel F de G induit par la réunion des arcs de F' et de C contient une s -arborescence couvrante de G .*

Solution Notons que s est bien un sommet de G' puisqu'il n'appartient pas à C .

(a) Soit v' un sommet quelconque de G' et v le sommet de G dont v' est l'image. Puisqu'il existe, par définition, un (s, v) -chemin dans F , il existe, par l'Exercice 131, un (s, v') -chemin dans F' et ainsi s est une racine de F' . Notons que F est un graphe partiel de G , par conséquent F' est un graphe partiel de G' et alors s est une racine de G' . Par l'Exercice 151, G' contient bien une s -arborescence couvrante, voir FIG. 2.41.

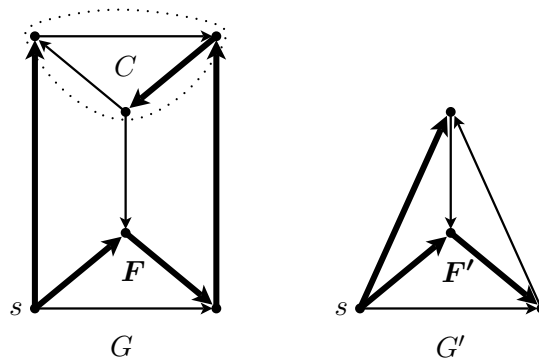


FIGURE 2.41 – Un graphe orienté G qui contient un sommet s , un circuit C et une s -arborescence couvrante F . Le graphe orienté G' obtenu à partir de G en contractant C et une s -arborescence couvrante F' de G' .

(b) Soient v_C le sommet de G' obtenu par la contraction de C dans G , e' l'unique arc de F' entrant dans v_C (voir l'Exercice 152) et w l'extrémité terminale de e' dans G , voir FIG. 2.42.

Par l'Exercice 151, il suffit de montrer que s est une racine de F . Soient v un sommet de F distinct de s et v' son image dans G' . Par définition, il existe un (s, v') -chemin élémentaire P' dans F' . Dans la suite nous allons utiliser les chemins définis ci-dessous, voir FIG. 2.43 :

- $P_{s,w}$, le (s, w) -chemin dans G obtenu en remplaçant v_C par w dans un (s, v_C) -chemin de F' .

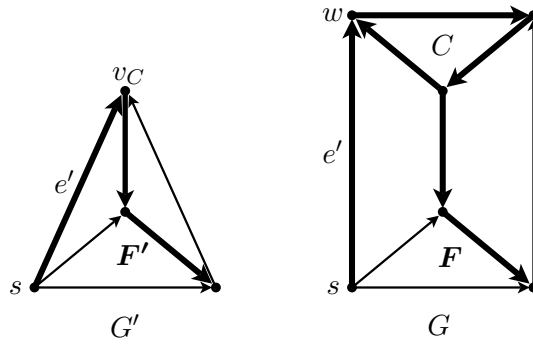


FIGURE 2.42 – Illustration du début de la solution de l'Exercice 165(b).

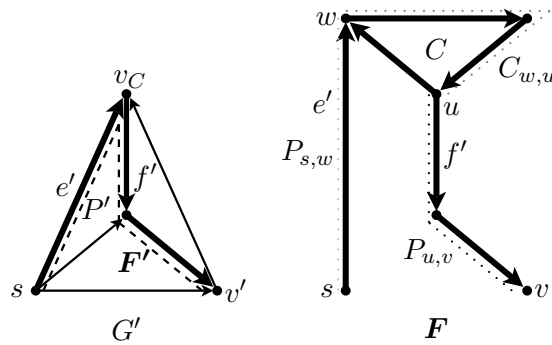


FIGURE 2.43 – Illustration de la fin de la solution de l'Exercice 165(b).

- $C_{w,u}$, le (w, u) -chemin dans C pour chaque sommet u de C , qui existe par la Remarque 50.

Nous allons distinguer trois cas :

- Si aucun arc de P' n'est incident à v_C , alors P' est aussi un (s, v) -chemin dans G .
- Si exactement un arc de P' est incident à v_C , alors $v' = v_C$, c'est-à-dire que v est un sommet de C . Alors la concaténation de $P_{s,w}$ et $C_{w,v}$ est un (s, v) -chemin dans G .
- Sinon, puisque P' est élémentaire, il contient exactement deux arcs incidents à v_C , l'arc entrant e' et l'arc sortant f' . Soit u le sommet de C qui est l'extrémité initiale de f' dans G . En remplaçant v_C par u dans le (v_C, v') -sous-chemin de P' , on obtient un (u, v) -chemin $P_{u,v}$ dans G . Alors la concaténation de $P_{s,w}$, $C_{w,u}$ et $P_{u,v}$ est un (s, v) -chemin dans G , voir FIG. 2.43. \square

Exercice 166 Soient G un graphe orienté, s une racine de G , c une fonction de coût sur les arcs de G qui est non-négative, C un circuit élémentaire de G de coût 0 qui ne contient pas s et G' le graphe orienté obtenu à partir de G en contractant C . Montrer que le coût minimum d'une s -arborescence couvrante de G est égal à celui d'une s -arborescence couvrante de G' .

Solution Nous allons montrer l'égalité en deux étapes.

Par l'Exercice 151, il existe une s -arborescence couvrante F de G de coût minimum. Par l'Exercice 165(a), le graphe orienté F' obtenu à partir de F en contractant C contient une s -arborescence couvrante H' de G' . Puisque les coûts sont non-négatifs, on a que

$$c(H') \leq c(F') \leq c(F).$$

Par conséquent, le coût minimum d'une s -arborescence couvrante de G' est inférieur ou égal à celui d'une s -arborescence couvrante de G .

Par l'Exercice 165, il existe une s -arborescence couvrante F' de G' de coût minimum et le graphe partiel F de G induit par la réunion des arcs de F' et de C contient une s -arborescence couvrante H de G . Puisque les coûts sont non-négatifs et le coût de C est égal à 0, on a que

$$c(H) \leq c(F) = c(F') + c(C) = c(F').$$

Par conséquent, le coût minimum d'une s -arborescence couvrante de G est inférieur ou égal à celui d'une s -arborescence couvrante de G' . \square

Exercice 167 Exécuter l'algorithme Arborescence de Coût Minimum (FIG. 2.44) sur le graphe orienté de la FIG. 2.45.

Solution On note que le graphe orienté de la FIG. 2.45 possède bien une s -arborescence couvrante et donc l'algorithme Arborescence de Coût Minimum peut être appliqué. Les différentes étapes de l'application de l'algorithme Arborescence de Coût Minimum sur le graphe orienté de la FIG. 2.45 sont représentées sur la FIG. 2.46. L'Étape 0 est illustrée en (a). En (b) sont représentés le graphe orienté G_1 , les coûts c_2 calculés à la première itération de l'Étape 1, l'ensemble d'arcs F_1 calculé à la première itération de l'Étape 2 et le circuit C_1 calculé à la première itération de l'Étape 3. En (c) on a représenté le graphe orienté obtenu à la fin de la première itération de l'Étape 3 par contraction du circuit C_1 dans G_1 et en conservant les coûts c_2 . En (d) sont représentés le graphe orienté G_2 , les coûts c_3 calculés à la deuxième itération de l'Étape 1, l'ensemble d'arcs F_2 calculé à la deuxième itération de l'Étape 2 et le circuit C_2 calculé à la deuxième itération de l'Étape 3. En (e) on a représenté le graphe orienté obtenu à la fin de la deuxième itération de l'Étape 3 par contraction du circuit C_2 dans G_2 et en conservant les coûts c_3 . En (f) sont représentés le graphe orienté G_3 , les coûts c_4 calculés à la troisième itération de l'Étape 1, l'ensemble d'arcs F_3 calculé à la troisième itération de l'Étape 2. Puisque F_3 induit une s -arborescence couvrante de G_3 , l'algorithme passe à l'Étape 4. Dans cette étape l'algorithme décontracte le circuit C_2 pour obtenir A_2 représenté en (g), puis le circuit C_1 pour obtenir A_1 représenté en (h). L'algorithme s'arrête alors et les arcs de A_1 induisent une s -arborescence couvrante de G de coût minimum (égal à 18). \square

Exercice 168 (Justification de l'algorithme Arborescence de Coût Minimum (FIG. 2.44)) Soit k le nombre de graphes orientés G_i construits lors d'une exécution de l'algorithme Arborescence de Coût Minimum.

- (a) Montrer que pour tout i entre 1 et k , c_{i+1} est une fonction non-négative.
- (b) Montrer que pour tout i entre 1 et k , une s -arborescence couvrante H de G_i est de c_i -coût minimum si et seulement si H est de c_{i+1} -coût minimum.
- (c) Montrer qu'à l'Étape 3, si $S_i \neq V(G_i)$ alors il existe un circuit élémentaire dans $G_i^0 - S_i$.
- (d) Montrer qu'à l'Étape 4 pour tout i ($k \geq i \geq 1$), $(V(G_i), A_i)$ est
 - (i) une s -arborescence couvrante de G_i ,
 - (ii) de c_{i+1} -coût minimum.

Solution (a) Lors de la modification des coûts, pour tout arc uv de G_i , on a, par définition de $c_{i+1}(uv)$ et de $\varepsilon_i(v)$,

$$c_{i+1}(uv) = c_i(uv) - \varepsilon_i(v) \geq c_i(uv) - c_i(uv) = 0.$$

Donc c_{i+1} est une fonction non-négative.

ALGORITHME ARBORESCENCE DE COÛT MINIMUM DE CHU-LIU, EDMONDS :

ENTRÉE : Un graphe orienté $G = (V, A)$, un sommet s de G tel qu'il existe une s -arborescence couvrante de G , et une fonction de coût c sur les arcs de G qui est non-négative.

SORTIE : Une s -arborescence couvrante F de G de coût minimum.

Étape 0 : *Initialisation.*
 $G_1 := G, c_1 := c, i := 1.$

Étape 1 : *Modification des coûts.*
 Pour chaque sommet v de G_i , distinct de s faire
 $\varepsilon_i(v) := \min\{c_i(uv) : uv \in A(G_i)\}.$
 Pour chaque arc uv de G_i faire
 $c_{i+1}(uv) := c_i(uv) - \varepsilon_i(v).$

Étape 2 : *Marquage.*
 Soit G_i^0 le graphe partiel de G_i induit par les arcs de c_{i+1} -coût nul.
 Exécuter l'algorithme de Marquage Orienté sur G_i^0 et s pour obtenir
 - l'ensemble S_i des sommets qu'on peut atteindre depuis s par un chemin dans G_i^0 ,
 - un ensemble F_i d'arcs de G_i^0 tel que (S_i, F_i) soit une s -arborescence.

Étape 3 : *Contraction d'un circuit de coût 0.*
 Si $S_i \neq V(G_i)$ alors
 exécuter l'algorithme Circuit sur $G_i^0 - S_i$ pour trouver un circuit élémentaire C_i ,
 $G_{i+1} := G_i/C_i$,
 $i := i + 1$,
 aller à l'Étape 1.

Étape 4 : *Construction de l'arborescence par décontraction des circuits en ordre inverse.*
 $A_i := F_i.$
 Tant que $i > 1$ faire
 Noter v_i le sommet $v_{V(C_{i-1})}$ de G_i obtenu par la contraction de C_{i-1} dans G_{i-1} ,
 Chercher l'arc e_i de A_i qui est l'unique arc entrant dans v_i ,
 Noter w_{i-1} l'extrémité terminale de e_i dans G_{i-1} ,
 Noter f_{i-1} l'arc entrant de w_{i-1} dans C_{i-1} ,
 $A_{i-1} := A_i \cup (A(C_{i-1}) \setminus \{f_{i-1}\}),$
 $i := i - 1.$

Étape 5 : *Fin de l'algorithme.*
 $F := (V, A_1), \text{ STOP.}$

FIGURE 2.44 – Algorithme Arborescence de Coût Minimum.

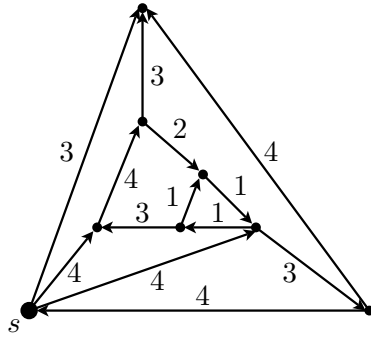


FIGURE 2.45 – Un graphe orienté G et un sommet s de G pour lesquels il existe une s -arborescence couvrante de G ; les coûts des arcs de G .

(b) Soit H une s -arborescence couvrante de G_i . Par l'Exercice 152(c), H contient exactement un arc entrant de chacun des sommets distincts de s et donc

$$c_{i+1}(H) = c_i(H) - \sum_{v \in V \setminus \{s\}} \varepsilon_i(v).$$

Puisque le dernier terme de cette équation ne dépend pas de H , (b) est vérifié.

(c) Nous montrons d'abord que G_i possède une s -arborescence couvrante : pour $i = 1$, puisque $G_1 = G$, cela est vrai par hypothèse, et pour $i > 1$, puisque G_i est obtenu à partir de G en contractant consécutivement les circuits C_1, \dots, C_{i-1} , cela est vrai par l'Exercice 165(a). Par l'Exercice 151(b), le degré entrant dans G_i de chaque sommet distinct de s est alors supérieur ou égal à 1. Lors de la modification des coûts, un de ces arcs entrants devient de c_{i+1} -coût nul ce qui veut dire que le degré entrant dans G_i^0 de chaque sommet distinct de s est supérieur ou égal à 1. Puisque, par définition, S_i est l'ensemble des sommets qu'on peut atteindre depuis s par un chemin dans G_i^0 , on a que s appartient à S_i et qu'il n'y a pas d'arc uv de G_i^0 tel que $u \in S_i$ et $v \in V(G_i^0) \setminus S_i$. On en conclut que dans $G_i^0 - S_i$ tous les sommets sont de degré entrant supérieur ou égal à 1. Par l'Exercice 132(b), il existe alors un circuit élémentaire dans $G_i^0 - S_i$.

(d) Nous allons montrer les propriétés (i) et (ii) par récurrence descendante sur i .

Par définition, pour tout i entre 1 et k , (S_i, F_i) est une s -arborescence de c_{i+1} -coût nul. Dans G_k , le dernier graphe orienté construit par l'algorithme, on a $S_k = V(G_k)$, et donc $(V(G_k), F_k)$ est une s -arborescence couvrante de G_k . La fonction c_{k+1} étant non-négative par (a), $(V(G_k), F_k)$ est de c_{k+1} -coût minimum. Or, $A_k = F_k$ et la propriété est ainsi vérifiée pour $i = k$.

Supposons maintenant que $(V(G_i), A_i)$ soit une s -arborescence couvrante de G_i de c_{i+1} -coût minimum.

(i) Par l'Exercice 165(b), $H_{i-1} := (V(G_{i-1}), A_i \cup A(C_{i-1}))$ possède une s -arborescence couvrante. Puisque A_i et $A(C_{i-1})$ sont disjoints, par l'hypothèse de récurrence et l'Exercice 84, puisque C_{i-1} est un circuit élémentaire, et par construction de G_i , on a

$$|A_i \cup A(C_{i-1})| = |A_i| + |A(C_{i-1})| = (|V(G_i)| - 1) + |V(C_{i-1})| = |V(G_{i-1})|.$$

En conséquence, par l'Exercice 84, il existe un arc a dans $A_i \cup A(C_{i-1})$ tel que $(V(G_{i-1}), A_i \cup A(C_{i-1}) \setminus \{a\})$ soit une s -arborescence couvrante de G_{i-1} . Puisque C_{i-1} ne contient pas s , $w_{i-1} \neq s$. Alors, par l'Exercice 152(c), dans $G_{i-1}(A_i)$ le degré entrant de w_{i-1} est égal à 1. Puisque C_{i-1} est un circuit élémentaire qui contient w_{i-1} , le degré entrant de w_{i-1} dans C_{i-1} est

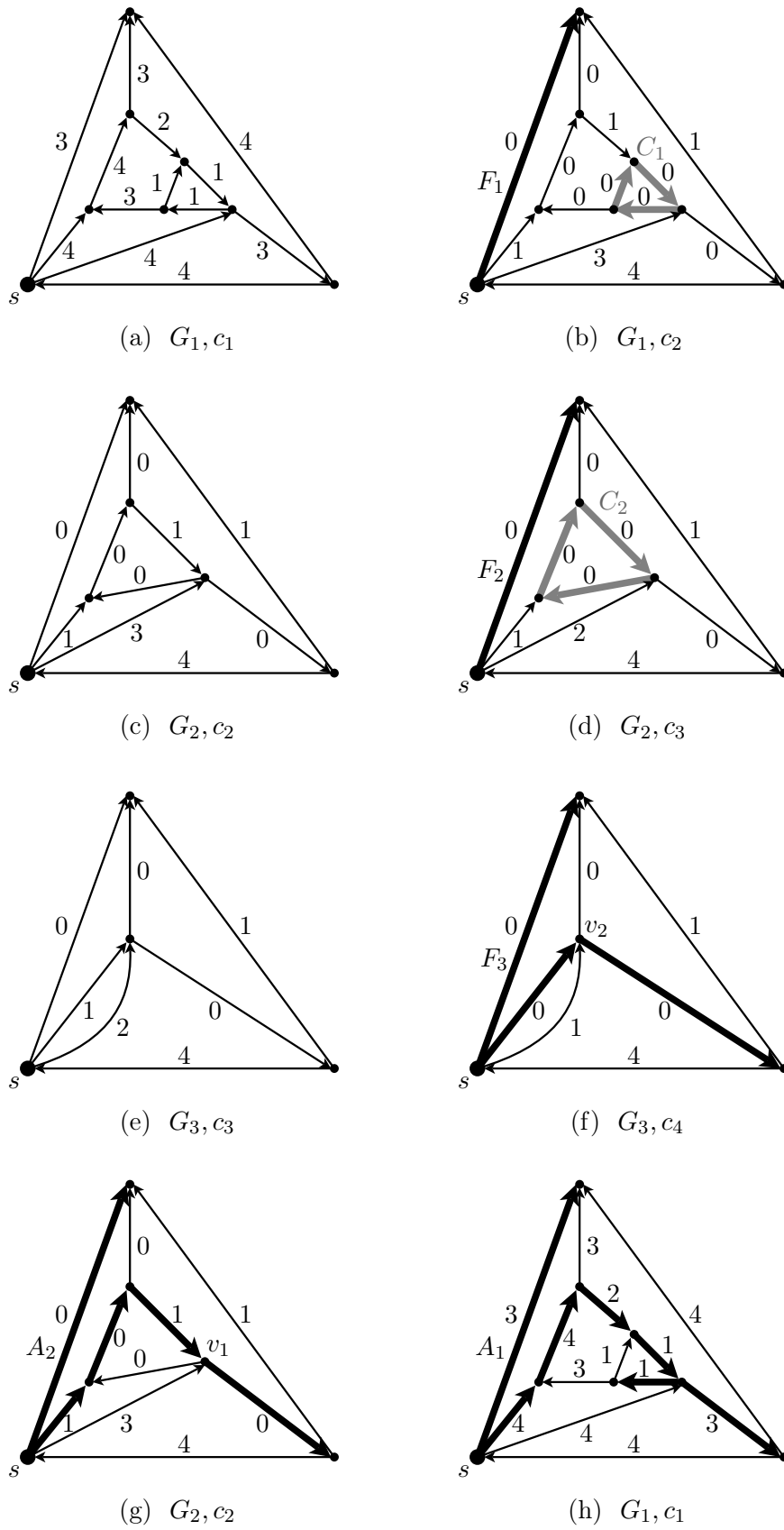


FIGURE 2.46 – Les différentes étapes de l'application de l'algorithme Arborescence de Coût Minimum sur l'exemple de la FIG. 2.45.

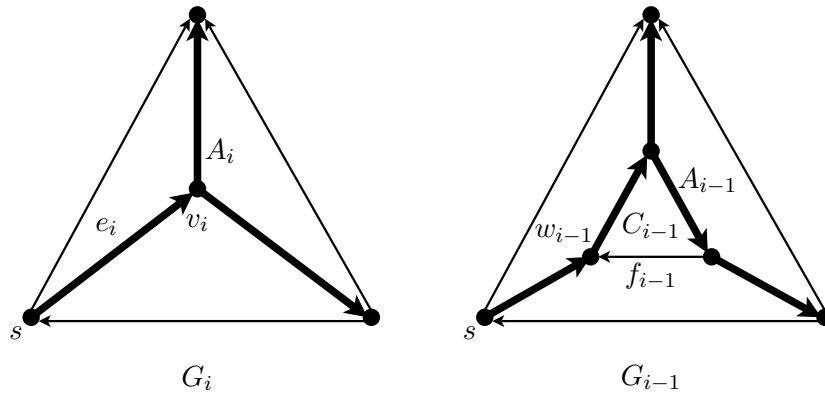


FIGURE 2.47 – Illustration de la construction d’une s -arborescence couvrante $(V(G_{i-1}), A_{i-1})$ de G_{i-1} à partir d’une s -arborescence couvrante $(V(G_i), A_i)$ de G_i .

égal à 1, et l’arc noté f_{i-1} dans l’algorithme est uniquement déterminé, voir FIG. 2.47. Puisque A_i et $A(C_{i-1})$ sont disjoints, on a $d_{H_{i-1}}(w_{i-1}) \geq 2$. Par l’Exercice 152(c), l’arc a à supprimer doit être alors un arc entrant de w_{i-1} dans H_{i-1} et appartenir au circuit C_{i-1} . On en déduit que $a = f_{i-1}$. Ainsi, puisque $A_{i-1} = A_i \cup A(C_{i-1}) \setminus \{f_{i-1}\}$, on a que $(V(G_{i-1}), A_{i-1})$ est une s -arborescence couvrante de G_{i-1} , voir FIG. 2.47.

(ii) Par l’hypothèse de récurrence et par (b), $(V(G_i), A_i)$ est une s -arborescence couvrante de G_i de c_i -coût minimum. Donc, par l’Exercice 166, $c_i(A_i)$ est le c_i -coût minimum d’une s -arborescence couvrante de G_{i-1} . De plus, puisque A_{i-1} est obtenu à partir de A_i en rajoutant des arcs de c_i -coût nuls, on a $c_i(A_{i-1}) = c_i(A_i)$. Par conséquent, $(V(G_{i-1}), A_{i-1})$ est une s -arborescence couvrante de G_{i-1} de c_i -coût minimum. \square

Soient $G = (V, A)$ un graphe orienté et S un sous-ensemble non-vide de V . Un **S-connecteur orienté** de G est un graphe partiel de G dans lequel, pour tout sommet v , il existe un sommet de S à partir duquel v peut être atteint par un chemin. Une **S-forêt d’arborescences** de G est un graphe partiel de G qui est une forêt d’arborescences dont chaque composante connexe a sa racine dans S et ne contient aucun autre sommet de S .

Remarque 73 Une S -forêt d’arborescences de G est un S -connecteur orienté de G .

Exercice 169 Soient $G = (V, A)$ un graphe orienté, S un sous-ensemble non-vide de sommets de G tel qu’il existe un S -connecteur orienté de G , et c une fonction de coût strictement positive sur les arcs de G . Le but de l’exercice est de trouver un S -connecteur orienté de G de coût minimum.

- (a) Montrer qu’un S -connecteur orienté de G contient une S -forêt d’arborescences de G .
- (b) Soit F un sous-ensemble d’arcs de G . Montrer que $G(F)$ est un S -connecteur orienté de G de coût minimum si et seulement si $G(F)$ est une S -forêt d’arborescences de G de coût minimum.

Soit $G' = (V', A')$ le graphe orienté obtenu à partir de G en contractant S . On note s le sommet v_S de G' obtenu par la contraction de S dans G .

- (c) Soit F un sous-ensemble d'arcs de G tel qu'aucun de ses arcs n'ait ses deux extrémités dans S . Montrer que $G(F)$ est une S -forêt d'arborescences de G de coût minimum si et seulement si $G'(F)$ est une s -arborescence couvrante de G' de coût minimum.
- (d) En conclure que si $G'(F)$ est une s -arborescence couvrante de G' de coût minimum alors $G(F)$ est un S -connecteur orienté de G de coût minimum.
- (e) Trouver un S -connecteur orienté de G de coût minimum pour l'exemple de la FIG. 2.48.

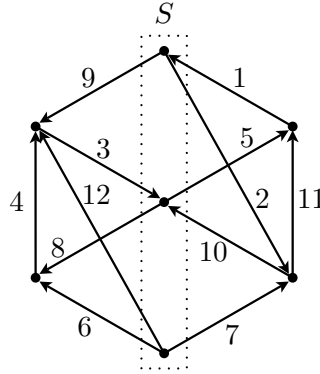


FIGURE 2.48 – Le graphe orienté G , les coûts de ses arcs et l'ensemble de sommets S .

Solution (a) Soit $G(F)$ un S -connecteur orienté de G . On raisonne par récurrence sur $|S|$. Si $|S| = 1$, soit s l'unique élément de S . Par l'Exercice 151, $G(F)$ contient une s -arborescence couvrante et celle-ci est une S -forêt d'arborescences de G .

Supposons que la propriété soit vérifiée pour $k \geq 1$ et que $|S| = k + 1$. Soient s un sommet de S , et W l'ensemble des sommets atteignables depuis s , par un chemin dans $G(F)$ ne contenant aucun autre sommet de S . On remarque que tous les sommets d'un tel chemin appartiennent à W . On note G_W , respectivement $G_{\overline{W}}$, le sous-graphe partiel de G induit par F et W , respectivement F et $\overline{W} := V \setminus W$. Par ce qui précède, le graphe orienté G_W admet s pour racine et donc, par l'Exercice 151, il contient une s -arborescence couvrante (W, A_1) .

On va montrer que $G_{\overline{W}}$ est un $(S \setminus \{s\})$ -connecteur orienté de $G_{\overline{W}}$. Soit v un sommet de \overline{W} . Puisque $G(F)$ est un S -connecteur orienté de G , il existe un chemin dans $G(F)$ depuis un sommet de S jusqu'à v . On choisit un tel chemin avec un nombre minimum d'arcs, noté P_v . On remarque que P_v ne contient qu'un seul sommet de S . Supposons qu'il existe un sommet $w \in W \cap V(P_v)$. Alors, par définition de W , il existe un (s, w) -chemin P_w dans $G(F)$ ne contenant aucun autre sommet de S . La concaténation du chemin P_w et du sous-chemin $P_v[w, v]$ est un (s, v) -chemin P'_v dans $G(F)$ ne contenant aucun autre sommet de S que s . Par conséquent, $v \in W$ ce qui contredit l'hypothèse $v \in \overline{W}$. Ainsi P_v est un chemin dans $G_{\overline{W}}$ depuis un sommet de $(S \setminus \{s\})$ vers v . On a bien démontré que $G_{\overline{W}}$ est un $(S \setminus \{s\})$ -connecteur orienté de $G_{\overline{W}}$.

Par l'hypothèse de récurrence, il existe une $(S \setminus \{s\})$ -forêt d'arborescences (\overline{W}, A_2) de $G_{\overline{W}}$. Comme W et \overline{W} forment une partition de V , le graphe orienté $(V, A_1 \cup A_2)$ a une composante connexe qui a s pour racine (l'arborescence (W, A_1)) et ses autres composantes connexes sont les mêmes que celles de la $(S \setminus \{s\})$ -forêt d'arborescences (\overline{W}, A_2) . On en conclut que $(V, A_1 \cup A_2)$ est une S -forêt d'arborescences de $G(F)$.

(b) Soient $G(F_1)$ un S -connecteur orienté de G de coût minimum et $G(F_2)$ une S -forêt d'arborescence de G de coût minimum. Par la Remarque 73, $G(F_2)$ est un S -connecteur orienté de G , et ainsi, puisque $G(F_1)$ est de coût minimum, on a

$$c(F_1) \leq c(F_2).$$

Par (a), $G(F_1)$ contient une S -forêt d'arborescence $G(F_3)$ de G , et ainsi, puisque $G(F_2)$ est de coût minimum, on a

$$c(F_2) \leq c(F_3).$$

Puisque les coûts sont strictement positifs et que $F_3 \subseteq F_1$, on a

$$c(F_3) \leq c(F_1).$$

On en conclut que $c(F_1) = c(F_2) = c(F_3)$ et ainsi $F_3 = F_1$. Par conséquent, le coût minimum d'un S -connecteur orienté de G est égal au coût minimum d'une S -forêt d'arborescence de G . En conclusion, $G(F_1) = G(F_3)$ est une S -forêt d'arborescence de G de coût minimum et $G(F_2)$ est un S -connecteur orienté de G de coût minimum, ce qui donne les conditions respectivement nécessaire et suffisante de (b).

(c) On note que, par hypothèse, tous les arcs de F sont dans G' et donc $G'(F)$ est bien défini.

Montrons tout d'abord que si $G(F)$ est une S -forêt d'arborescences de G alors $G'(F)$ est une s -arborescence couvrante de G' . Pour un sommet v de $V \setminus S = V' \setminus \{s\}$, la composante connexe de $G(F)$ qui contient v est une arborescence dont la racine appartient à S . Par l'Exercice 152(c), il existe exactement un arc de $G(F)$ entrant en v et ainsi il existe exactement un arc de $G'(F)$ entrant en v . Par l'Exercice 152(c), chaque composante connexe de $G(F)$ est sans circuit, donc $G(F)$ n'a pas de circuit non plus. Si $G'(F)$ contenait un circuit, alors par la Remarque 55, $G'(F)$ contiendrait un circuit élémentaire. Celui-ci devrait contenir s et ses arcs devraient être ceux d'un chemin de G entre deux sommets de S . Or par définition, chaque composante connexe de $G(F)$ contient exactement un sommet de S , on aboutit à une contradiction. Par l'Exercice 152(c), $G'(F)$ est donc bien une s -arborescence couvrante de G' .

Montrons maintenant que si $G'(F)$ est une s -arborescence couvrante de G' alors $G(F)$ est une S -forêt d'arborescences de G . Par définition, s est une racine de $G'(F)$, et alors pour tout sommet v de $V' \setminus \{s\} = V \setminus S$, il existe dans $G'(F)$ un chemin depuis un sommet de S vers v , en conséquence, $G(F)$ est un S -connecteur orienté de G . Par (a), il existe $F' \subseteq F$ tel que $G(F')$ est une S -forêt d'arborescences de G . Par la démonstration ci-dessus, $G'(F')$ est une s -arborescence couvrante de G' . Or $F' \subseteq F$ et $G'(F)$ est aussi une s -arborescence couvrante de G' , donc par l'Exercice 152(d), $F' = F$ et ainsi $G(F) = G(F')$ est une S -forêt d'arborescences de G .

Puisque, par définition, aucun arc d'une S -forêt d'arborescences de G n'a ses deux extrémités dans S , on obtient, par ce qui précède, que les ensembles d'arcs des S -forêts d'arborescences de G sont exactement les mêmes que ceux des s -arborescences couvrantes de G' et donc leurs coûts minimum sont égaux.

(d) Soit $G'(F)$ une s -arborescence couvrante de G' de coût minimum. Par (c), $G(F)$ est une S -forêt d'arborescences de G de coût minimum, et par (b), $G(F)$ est un S -connecteur orienté de G de coût minimum.

(e) Par (d), il suffit de trouver une s -arborescence couvrante de G' de coût minimum pour le graphe orienté auxiliaire G' défini dans l'énoncé. Une telle s -arborescence peut se déterminer à l'aide de l'Algorithme Arborescence de Coût Minimum (FIG. 2.44). La solution pour l'exemple de la FIG. 2.48 est indiquée sur la FIG. 2.49. \square

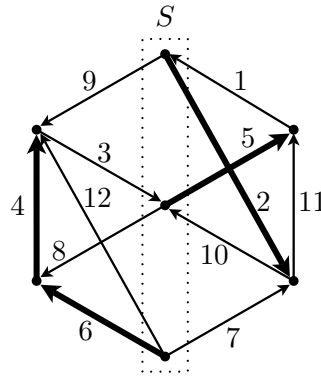


FIGURE 2.49 – Les arcs en gras forment une solution optimale.

2.8 Graphes orientés eulériens

Un circuit C de G est un **circuit eulérien** de G s’il contient tous les arcs de G ; similairement, un chemin simple P de G est dit **chemin eulérien** si P contient tous les arcs de G . Un graphe orienté est dit **eulérien** s’il possède un circuit eulérien.

Exercice 170 Pour chaque graphe orienté de la FIG. 2.50, est-il possible, sans lever le crayon, de tracer chaque arc exactement une fois et en respectant l’orientation? Justifier les réponses.

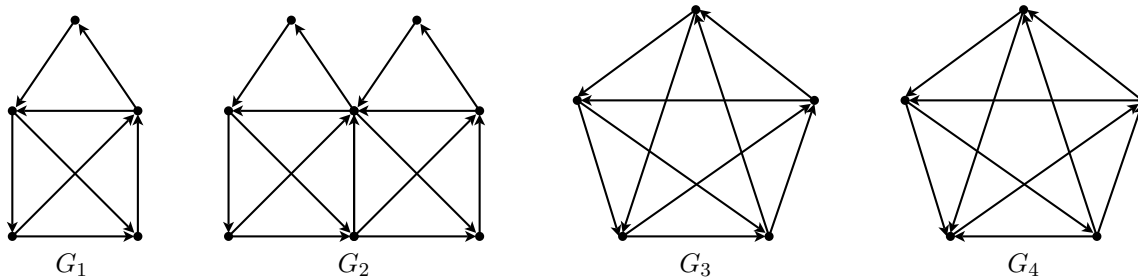


FIGURE 2.50 – Les graphes orientés de l’Exercice 170.

Solution Remarquons que, pour un graphe orienté G , il est possible, sans lever le crayon, de tracer chaque arc exactement une fois et en respectant l’orientation si et seulement si G possède un chemin eulérien ou un circuit eulérien. La numérotation des arcs de G_1 indiquée sur la FIG. 2.51 correspond à un chemin eulérien de G_1 , et la réponse pour G_1 est donc affirmative. De même pour G_3 puisqu’il contient un circuit eulérien indiqué sur la FIG. 2.51.

S’il existe une solution pour un graphe orienté G alors chaque sommet v qui n’est ni le premier ni le dernier sommet visité lors du traçage des arcs est de degré entrant égal au degré sortant, puisque les arcs qui lui sont incidents sont partitionnés en k couples (chacun constitué d’un arc entrant et d’un arc sortant de v) correspondant aux k passages du crayon par ce sommet. Pour le premier sommet la situation est presque la même, sauf qu’au premier passage on n’a qu’un arc sortant. De même, pour le dernier sommet au dernier passage on n’a qu’un arc entrant. Par conséquent, quand le premier et le dernier sommet coïncident, tous les sommets de G ont degré entrant égal au degré sortant. Sinon, G contient exactement deux sommets dont la différence des degrés entrant et sortant est non nulle, et celle-ci est alors égale à 1 ou -1 . Les trois sommets de G_2 indiqués sur la FIG. 2.51 sont de degré entrant et sortant différents; et le sommet de G_4 indiqué sur la FIG. 2.51 est tel que la différence entre degrés sortant et entrant est égale à 2. Pour G_2 et G_4 la réponse est donc non.

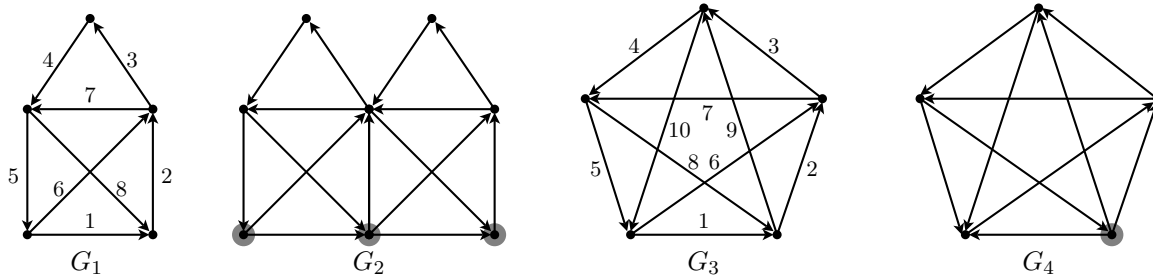


FIGURE 2.51 – Justification des réponses à l'Exercice 170. □

Exercice 171 Dans un domaine de ski de fond les pistes sont tracées en sens unique pour éviter les collisions éventuelles. Le plan des pistes de plusieurs domaines est représenté FIG. 2.52. Un skieur curieux, mais paresseux, voudrait passer par chaque tronçon exactement une fois tout en revenant au point de départ à la fin de son parcours. Pouvez-vous, pour chaque station de ski de la FIG. 2.52, aider le skieur à décider son trajet ou bien le convaincre que son objectif est impossible à réaliser ?

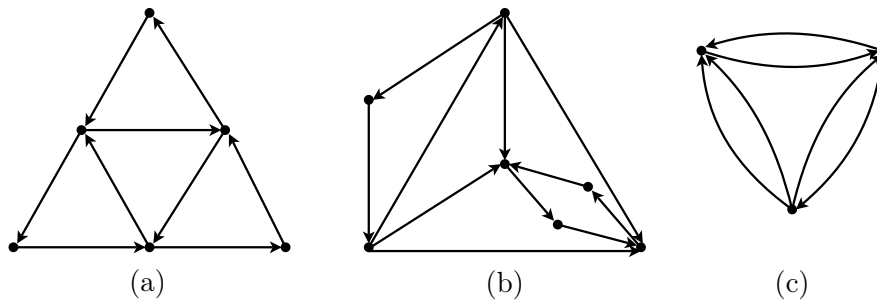


FIGURE 2.52 – Trois domaines de ski de fond.

Solution Le problème est équivalent à décider si le graphe orienté constitué par les pistes (arcs) et et leurs points de départ et d'arrivée (sommets) possède un circuit eulérien. En effet, tout trajet du skieur qui le ramène son point de départ, et passe une fois et une seule par chacune des pistes, est un circuit eulérien du graphe orienté. Réciproquement, par la Remarque 48, si le graphe orienté possède un circuit eulérien, alors n'importe quel sommet peut être le point de départ et il suffit de suivre les pistes dans l'ordre de ce circuit (par définition il n'y a pas de sommet isolé dans le graphe des pistes).

(a) La numérotation indiquée sur la FIG. 2.53(a) correspond à un circuit eulérien, et donc en suivant les pistes dans cet ordre le skieur sera satisfait.

(b) L'ensemble X de sommets indiqué en grisé sur la FIG. 2.53(b) n'a que des arcs sortants. Un trajet dont le point de départ est hors de X ne pourra jamais "entrer" en X . Par conséquent, ceci va convaincre le skieur que son objectif est impossible à réaliser.

(c) Puisque le sommet v indiqué sur la FIG. 2.53(c) est de degré 4, s'il existait un circuit eulérien, il devrait passer deux fois par v mais ce n'est pas possible puisqu'il existe un seul arc qui entre dans v . Ceci va convaincre le skieur que son objectif est impossible à réaliser. □

Exercice 172 (Caractérisation de l'existence d'un circuit eulérien) Montrer qu'un graphe orienté G sans sommet isolé possède un circuit eulérien si et seulement si il est connexe et (2.6) est satisfaite.

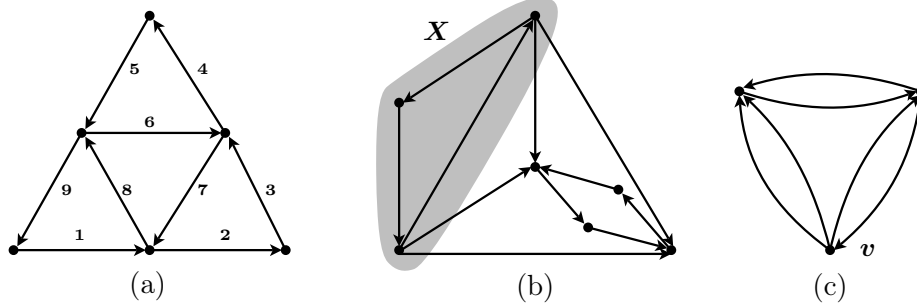


FIGURE 2.53 – La résolution de l'Exercice 171.

Solution Montrons tout d'abord que la condition est nécessaire. Supposons donc que G possède un circuit eulérien C . Puisque G n'a pas de sommet isolé, tous ses sommets appartiennent à C . Pour n'importe quel couple (u, v) , en parcourant C , on a un (u, v) -chemin, donc C est connexe. D'autre part, comme C est un circuit qui contient tous les arcs de G , par l'Exercice 134 on a que (2.6) est satisfaite.

Pour vérifier que la condition est suffisante, supposons que $G = (V, A)$ est connexe et (2.6) est satisfaite. D'après l'Exercice 134, il existe une partition des arcs de G en circuits. Soit \mathcal{C} une telle partition en un nombre minimum de circuits. Puisque G est sans sommet isolé, G contient au moins un arc et ainsi \mathcal{C} contient au moins un circuit. Il faut montrer que \mathcal{C} contient un seul circuit.

Supposons qu'il existe un sommet v appartenant à deux circuits distincts C_1 et C_2 de \mathcal{C} . En remplaçant une occurrence quelconque de v dans C_1 par C_2 on obtient un nouveau circuit C tel que $A(C) = A(C_1) \cup A(C_2)$. L'ensemble de circuits $\mathcal{C}' = (\mathcal{C} \setminus \{C_1, C_2\}) \cup C$ est une partition des arcs de G telle que $|\mathcal{C}'| < |\mathcal{C}|$, ce qui contredit notre hypothèse sur \mathcal{C} .

Par conséquent, les circuits dans \mathcal{C} sont sommet-disjoints. Puisque, de plus, ces circuits contiennent tous les arcs de G , les arcs incidents à un sommet appartiennent tous à un même circuit de \mathcal{C} et donc tous ceux d'une composante connexe également. Ceci implique que les composantes connexes de G et les circuits de \mathcal{C} coïncident. Mais G est connexe, donc \mathcal{C} contient un seul circuit. \square

Remarque 74 Pour trouver un circuit eulérien dans un graphe orienté eulérien on peut utiliser une version orientée de l'Algorithme Cycle Eulérien de la FIG. 1.46 en remplaçant les mots "arête" et "cycle" par "arc" et "circuit" respectivement.

Exercice 173 (Justification de l'algorithme Circuit eulérien (FIG. 2.54))

(a) Montrer qu'à la fin de l'Etape 1 on a bien obtenu une s -anti-arborescence (V, F) .

Soit k le nombre d'itérations de l'Etape 2.

(b) Montrer que, pour $0 \leq i \leq k$, les ensembles d'arcs de C_i et de G_i forment une bipartition de l'ensemble des arcs de G .

(c) Montrer que, pour $0 \leq i \leq k$, C_i est un chemin simple de u_0 à u_i .

(d) Montrer que C_k est un circuit.

(e) Montrer que G_k n'a plus d'arcs.

(f) Montrer que C est un circuit eulérien de G .

Solution (a) L'Algorithme Modifié de Marquage Orienté exécuté sur G et u_0 s'arrête avec un sous-graphe (S, F) tel que, par définition de l'algorithme et par l'Exercice 148,

$$d^-(S) = 0 \tag{2.16}$$

ALGORITHME CIRCUIT EULÉRIEN :

ENTRÉE : Un graphe orienté $G = (V, A)$ connexe tel que chaque sommet de G a son degré entrant égal à son degré sortant.

SORTIE : Un circuit eulérien C de G .

Etape 1 : *Construction d'une anti-arborescence.*
 Choisir un sommet u_0 de G .
 Exécuter l'Algorithme Modifié de Marquage Orienté (FIG. 2.27) sur G et u_0 pour obtenir une u_0 -anti-arborescence (V, F) .

Etape 2 : *Construction du circuit.*
 $C_0 := u_0, G_0 := G, i := 0$.
 Tant qu'il existe un arc sortant de u_i dans G_i faire :
 Choisir un arc $e_{i+1} = u_i u_{i+1}$ de G_i , si possible n'appartenant pas à F .
 $C_{i+1} := C_i e_{i+1} u_{i+1}$,
 $G_{i+1} := G_i - e_{i+1}$,
 $i := i + 1$.

Etape 3 : *Fin de l'algorithme.*
 $C := C_i$,
 STOP.

FIGURE 2.54 – Algorithme Circuit eulérien.

(S, F) est une u_0 -anti-arborescence.

Il nous reste à montrer que $S = V$. Par hypothèse, $d^+(v) = d^-(v)$ pour tout $v \in S$, donc par (2.2) de l'Exercice 124,

$$d^+(S) = d^-(S). \quad (2.17)$$

Ainsi, par (2.16) et (2.17), $d(S) = d^+(S) + d^-(S) = 2d^-(S) = 0$. Puisque G est connexe, $S \neq \emptyset$ (car $u_0 \in S$) et $d(S) = 0$, par l'Exercice 28, on a $S = V$.

(b) On va procéder par récurrence sur i . Pour $i = 0$, $A(C_0) = \emptyset$ et $A(G_0) = A(G)$. Ensuite, pour chaque i ($0 \leq i \leq k-1$), C_{i+1} est obtenu en rajoutant à C_i l'arc $u_i u_{i+1}$ qu'on enlève de G_i pour obtenir G_{i+1} . La propriété de bipartition est donc conservée.

(c) On va procéder par récurrence sur i . Pour $i = 0$, $C_0 = u_0$ est un chemin simple de u_0 à u_0 . Supposons que pour un i ($0 \leq i \leq k-1$), C_i soit un chemin simple de u_0 à u_i . Par définition, C_{i+1} est obtenue à partir de C_i en rajoutant un arc $u_i u_{i+1}$ de G_i qui par (b), n'appartient pas à C_i . Par conséquent, C_{i+1} est un chemin simple de u_0 à u_{i+1} . La propriété (c) est bien vérifiée pour $i + 1$.

(d) Par (c), C_k est un chemin simple de u_0 à u_k . Supposons par l'absurde que $u_k \neq u_0$. Remarquons que quand on parcourt C_k tout arc entrant dans un sommet est suivi par un arc sortant de ce sommet sauf pour u_k . Puisque, par définition d'un chemin simple, les arcs de C_k sont tous distincts, on en déduit que dans C_k le nombre d'arcs entrant dans u_k est plus grand que le nombre d'arcs sortant de u_k . Or, par hypothèse, dans G il y a en u_k autant d'arcs entrant que d'arcs sortant. Par (b), il reste donc dans G_k au moins un arc sortant de u_k , ce qui contredit la condition d'arrêt de l'algorithme.

(e) Soit $V_0 = \{v \in V : d_{G_k}^+(v) = 0\}$. Par (c),(d) et le critère d'arrêt de l'algorithme, on a $u_0 = u_k \in V_0$. Par (d) et l'Exercice 134, dans C_k chaque sommet a son degré entrant égal à son degré sortant. Puisque, par hypothèse, cette propriété est également vraie dans G , par (b), elle l'est aussi dans G_k . Alors, par la définition de V_0 , pour chaque sommet $v \in V_0$, on a

$d_{G_k}^-(v) = d_{G_k}^+(v) = 0$ et ainsi v est isolé dans G_k . Soit $V_+ = V \setminus V_0 = \{v \in V : d_{G_k}^+(v) > 0\}$. Supposons que $V_+ \neq \emptyset$. Par la Remarque 62, il existe un arc uv de V_+ à V_0 qui appartient à F . Par la Remarque 63, uv est l'unique arc sortant de u dans F . Par $u \in V_+$, on a $d_{G_k}^+(u) > 0$ et alors, par la condition de choix de l'arc sortant du sommet courant à l'Etape 2, l'arc uv de F appartient à G_k . Alors $d_{G_k}^-(v) > 0$, donc v n'est pas isolé dans G_k , ce qui est une contradiction.

(e) Par (d), $C = C_k$ est un circuit. Par (e), G_k n'a aucun arc, donc, par (b), C_k contient tous les arcs de G . Par définition, C est un circuit eulérien. \square

Exercice 174 (Caractérisation de l'existence d'un chemin eulérien) *Montrer qu'un graphe orienté G sans sommet isolé possède un chemin eulérien d'un sommet x à un sommet y différent de x si et seulement si G est connexe et*

$$d_G^+(v) = d_G^-(v) \quad \text{pour tout } v \in V(G) \setminus \{x, y\}, \quad (2.18)$$

$$d_G^+(x) = d_G^-(x) + 1, \quad (2.19)$$

$$d_G^+(y) = d_G^-(y) - 1. \quad (2.20)$$

Solution Soit G' le graphe orienté obtenu à partir de G en rajoutant un arc $e' = yx$. On remarque que les demi-degrés dans G et dans G' sont les mêmes à l'exception de $d_G^-(x)$ qui est égal à $d_{G'}^-(x) - 1$ et de $d_G^+(y)$ qui est égal à $d_{G'}^+(y) - 1$.

Montrons tout d'abord que la condition est nécessaire. Supposons donc que G possède un chemin eulérien P de x à y . Alors, puisque G est sans sommet isolé, G est connexe. De plus, la concaténation de P et de l'arc e' est un circuit eulérien de G' . Par l'Exercice 172, (2.6) est donc satisfaite pour tous les sommets de G' ; ainsi par la remarque ci-dessus, les conditions (2.18)-(2.20) sont effectivement satisfaites.

Pour vérifier que la condition est suffisante, supposons que G est connexe et que les conditions (2.18)-(2.20) sont satisfaites. Alors, par la Remarque 10, G' est connexe; et de plus d'après la remarque ci-dessus, (2.6) est satisfaite pour tous les sommets de G' . Donc, par l'Exercice 172, G' possède un circuit eulérien C . Par définition, $C - e'$ contient tous les arcs de G , et d'après la Remarque 49, $C - e'$ est un chemin simple, il s'agit donc d'un chemin eulérien de G . \square

2.9 Forte connexité

Un graphe orienté G est **fortement connexe** si, pour chaque couple (u, v) de sommets de G , il existe un chemin de u à v dans G . Pour des exemples voir FIG. 2.55.



FIGURE 2.55 – Deux graphes orientés fortement connexes.

Remarque 75 *Tout graphe orienté fortement connexe est un graphe connexe (Remarque 46), mais un graphe orienté connexe peut ne pas être fortement connexe (FIG. 2.61).*

Remarque 76 *Un circuit est fortement connexe par la Remarque 50.*

Remarque 77 *Le graphe orienté obtenu en rajoutant un arc à un graphe orienté fortement connexe est fortement connexe (exemple FIG. 2.55) puisqu'on ne détruit pas de chemin en rajoutant un arc.*

Dans un graphe orienté G , un sous-graphe fortement connexe et maximal pour cette propriété est appelé **composante fortement connexe** de G (FIG. 2.56). Un graphe orienté est donc fortement connexe si et seulement si il possède exactement une composante fortement connexe.

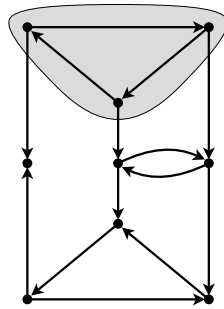


FIGURE 2.56 – Une composante fortement connexe d'un graphe orienté.

Exercice 175 *Le Maire du village "Les Arêtes", ayant voulu mettre en sens unique la rue principale, s'est malheureusement trompé en commandant le panneau "sens interdit" et a reçu douze panneaux, autant que le nombre de rues du village. Pour justifier la dépense, il décide d'utiliser tous les panneaux, c'est-à-dire de mettre en sens unique toutes les rues du village. Ayant conçu un plan, il le présente à son adjoint qui s'aperçoit que ce plan ne permet pas au Maire de regagner son domicile en voiture depuis la mairie. Après un instant de réflexion, ils se rendent compte que le plan devrait permettre depuis n'importe quel point du village de joindre tous les autres. L'adjoint se remet au travail et trouve un plan qui respecte cette contrainte. Depuis, le village a été rebaptisé "Les Arcs".*

Les deux plans sont représentés sur la FIG.2.57, décider lequel est celui du Maire et lequel est celui de l'adjoint, justifier les deux réponses.

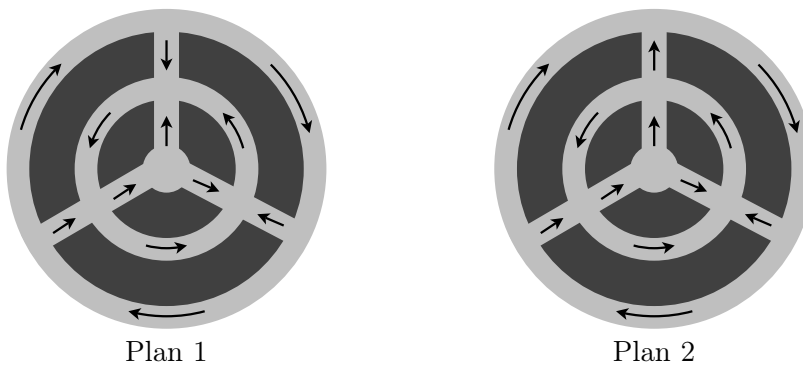


FIGURE 2.57 – Les deux plans du village "Les Arcs".

Solution On peut représenter chacun des plans par un graphe orienté dont les sommets sont les carrefours et les arcs sont les rues à sens unique, voir FIG. 2.58. Le graphe orienté associé à un plan qui respecte les contraintes doit être fortement connexe. Or, sur la FIG. 2.58, le graphe

orienté G_1 n'est pas fortement connexe (il n'y pas d'arc sortant de l'ensemble X des sommets grisés, donc aucun chemin d'un sommet de X vers un sommet en dehors de X) et le graphe orienté G_2 est fortement connexe par l'existence du circuit C marqué en gras et les Remarques 76 et 77. Par conséquent, le plan du Maire et celui de l'adjoint sont situés respectivement à gauche et à droite sur la figure FIG. 2.57, la mairie se trouve dans la zone grisée de G_1 et le domicile du maire se trouve en dehors.

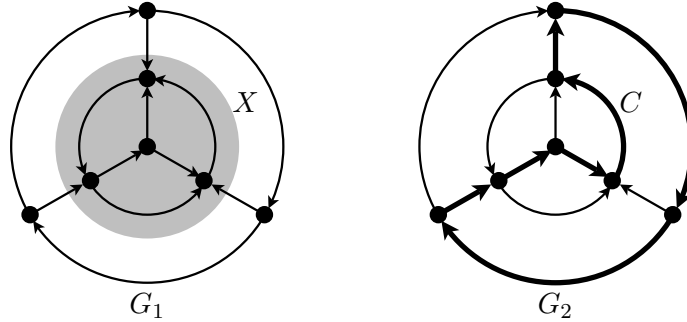


FIGURE 2.58 – Le graphe orienté G_1 avec un ensemble X de sommets sans arc sortant et le graphe orienté G_2 avec un circuit C contenant tous les sommets.

□

Exercice 176 *Est-il vrai que dans un graphe orienté fortement connexe il existe, pour tout couple (u, v) de sommets, deux chemins arc-disjoints, l'un de u à v et l'autre de v à u ?*

Solution Le graphe orienté de la FIG. 2.59 montre que la réponse est non.

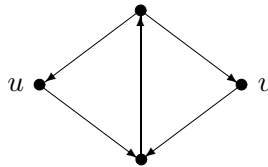


FIGURE 2.59 – Un graphe orienté fortement connexe et deux sommets u et v tels qu'il n'existe pas deux chemins arc-disjoints, l'un de u à v et l'autre de v à u .

□

Étant donnés deux graphes orientés G_1 et G_2 , on appelle **réunion de G_1 et G_2** , notée $G_1 \cup G_2$, le graphe orienté dont l'ensemble des sommets est la réunion des ensembles des sommets de G_1 et G_2 , et dont l'ensemble des arcs est la réunion des ensembles des arcs de G_1 et G_2 (FIG. 2.60).

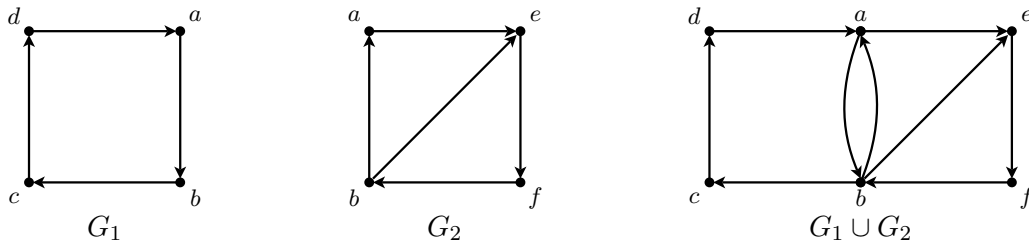


FIGURE 2.60 – Deux graphes orientés et leur réunion.

Exercice 177 Montrer que la réunion de deux graphes orientés fortement connexes qui ont au moins un sommet en commun est fortement connexe.

Solution Soient G_1 et G_2 deux graphes orientés fortement connexes qui contiennent tous les deux un sommet v , et soit G leur réunion. Considérons un couple quelconque (u, w) de sommets de G . Par définition, il existe $i, j \in \{1, 2\}$ tels que u et v soient dans G_i , v et w soient dans G_j . Puisque G_i et G_j sont fortement connexes, il existe dans G_i un chemin de u à v , et il existe dans G_j un chemin de v à w . La concaténation de ces deux chemins est un chemin dans G de u à w . On en conclut que G est fortement connexe. \square

Remarque 78 D'après l'Exercice 177, pour tout sommet v d'un graphe orienté G , il existe une unique composante fortement connexe de G contenant v . Par conséquent, l'ensemble des composantes fortement connexes de G forme une partition de l'ensemble des sommets de G (exemple FIG. 2.61).

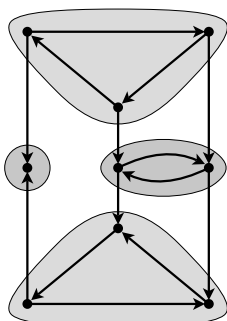


FIGURE 2.61 – Un graphe orienté et ses composantes fortement connexes.

Exercice 178 (Caractérisation des graphes orientés fortement connexes) Montrer qu'un graphe orienté G est fortement connexe si et seulement si, pour tout sous-ensemble X de sommets de G , non-vide et ne contenant pas tous les sommets de G , il existe au moins un arc de G qui sort de X .

Solution Montrons tout d'abord que la condition est nécessaire. Supposons donc que G est fortement connexe. Soit $X \subset V(G)$, $X \neq \emptyset$. Il existe alors $x \in X$ et $y \in V(G) \setminus X$. Puisque G est fortement connexe, il contient un (x, y) -chemin, et donc, par l'Exercice 129, il existe au moins un arc de G qui sort de X .

Pour montrer que la condition est suffisante supposons qu'elle soit satisfaite. Soit (u, v) un couple de sommets quelconque de G . Par la condition et par l'Exercice 129, G contient un chemin de u à v , donc G est fortement connexe. \square

Exercice 179 Montrer qu'un graphe orienté G est fortement connexe si et seulement si G est connexe et tout arc de G appartient à un circuit de G .

Solution Montrons tout d'abord que les conditions sont nécessaires. Supposons donc que G est fortement connexe. Par la Remarque 75, G est connexe. Soit uv un arc quelconque de G . Par définition et par l'Exercice 128, il existe dans G , un chemin simple de v à u . La concaténation de ce chemin avec uv est un circuit de G qui contient l'arc uv .

Pour montrer que les conditions sont suffisantes supposons qu'elles soient satisfaites. Soit donc G un graphe orienté connexe tel que tout arc appartienne à un circuit de G . Par l'Exercice 178, il suffit de montrer que pour tout $X \subset V(G)$, $X \neq \emptyset$, il existe un arc de G qui sort de X . Supposons que ce ne soit pas le cas. Puisque G est connexe, par l'Exercice 28, il existe au moins un arc $vu \in \delta(X)$ qui donc entre dans X . Comme vu appartient à un circuit, il existe dans G un chemin de u à v . Par l'Exercice 129, il existe alors au moins un arc de G qui sort de X ce qui est une contradiction. \square

Exercice 180 *Montrer qu'un graphe orienté G est fortement connexe si et seulement si il existe un sommet s tel que G possède une s -arborescence couvrante et une s -anti-arborescence couvrante.*

Solution Montrons tout d'abord que la condition est nécessaire. Supposons donc que G est fortement connexe. Soit s un sommet quelconque de G . Par définition, il existe dans G , pour tout sommet p , un chemin de s à p , donc par l'Exercice 151, G possède une s -arborescence couvrante. Soit G' le graphe orienté obtenu à partir de G en inversant la direction de chaque arc. Puisqu'un (u, v) -chemin dans G correspond à (v, u) -chemin dans G' et que G est fortement connexe, G' est aussi fortement connexe. Par l'argument précédent, G' contient une s -arborescence couvrante et celle-ci correspond, par la Remarque 57, à une s -anti-arborescence couvrante de G .

Pour montrer que la condition est suffisante supposons qu'elle soit satisfaite. Soit donc s un sommet tel que G possède une s -arborescence couvrante F_1 et une s -anti-arborescence couvrante F_2 . Soit (u, v) un couple quelconque de sommets de G . Par définition, F_2 contient un (u, s) -chemin et F_1 contient un (s, v) -chemin. La concaténation de ces chemins est un (u, v) -chemin dans G . Par conséquent, G est fortement connexe. \square

Exercice 181 *Soit G un graphe orienté connexe tel que pour chaque sommet, le degré entrant est égal au degré sortant. Montrer que G est fortement connexe.*

Solution Nous proposons deux démonstrations différentes.

Première démonstration. Soit X un sous-ensemble de sommets de G , non-vide et ne contenant pas tous les sommets de G . Par l'hypothèse sur les degrés des sommets et l'Exercice 125, on a $d^+(X) = d^-(X)$. Puisque G est connexe, par l'Exercice 28, on a $d^+(X) + d^-(X) > 0$. Par conséquent, $d^+(X) > 0$, et ainsi d'après l'Exercice 178(c), G est fortement connexe.

Deuxième démonstration. Par les hypothèses et par l'Exercice 172, G possède un circuit eulérien C . Pour n'importe quel couple (u, v) de sommets de G , en parcourant le circuit C , on a un (u, v) -chemin, donc G est fortement connexe. \square

Exercice 182 *Soit G un graphe orienté simple à $2k + 1$ sommets tel que pour chaque sommet, les degrés entrant et sortant sont supérieurs ou égaux à k . Montrer que G est fortement connexe.*

Solution Nous proposons deux démonstrations différentes.

Première démonstration. Soit (u, v) un couple quelconque de sommets distincts de G . Si l'arc uv existe, alors cet arc est un chemin de u à v . S'il existe un sommet w qui est à la fois successeur de u et prédécesseur de v , alors $uw + wv$ est un chemin de u à v . Si on n'est dans aucun des deux cas précédents, alors $N^+(u) \cup \{u\}$ et $N^-(v) \cup \{v\}$ sont disjoints. Puisque G est simple, par les hypothèses sur les degrés des sommets, chacun de ces sous-ensembles contient au moins $k + 1$ sommets, et donc G contiendrait au moins $2k + 2$ sommets, ce qui contredit l'hypothèse que G contient exactement $2k + 1$ sommets. Par conséquent, pour tout couple (u, v) de sommets de G , il existe un chemin de u à v , et ainsi G est fortement connexe.

Deuxième démonstration. Soit v un sommet quelconque de G . Puisque le nombre n de sommets de G est $2k+1$ et que G est simple, par la Remarque 1, $2k = n-1 \geq d(v)$. Or par la définition du degré, et par l'hypothèse sur les degrés entrant et sortant, on a $d(v) = d^-(v) + d^+(v) \geq k + k = 2k$. On a donc égalité partout, ce qui implique $n-1 = d(v)$ et $d^-(v) = k = d^+(v)$. Alors chaque sommet est relié à tous les autres, G est donc connexe, et tous les degrés entrant et sortant sont égaux. D'après l'Exercice 181, G est fortement connexe. \square

Étant donné un graphe orienté G , on définit la relation \sim_G sur les sommets : $u \sim_G v$ s'il existe un chemin de u à v et un chemin de v à u dans G .

Remarque 79 Dans un graphe orienté fortement connexe, pour chaque paire de sommets u et v , on a $u \sim_G v$.

Exercice 183 Soit G un graphe orienté.

(a) Montrer que \sim_G est une relation d'équivalence.

Soit X une classe d'équivalence de \sim_G .

(b) Montrer que les sommets d'un chemin de G dont les extrémités sont dans X appartiennent tous à X .

(c) En déduire que si Y est un sous-ensemble de sommets de G disjoint de X , alors X est une classe d'équivalence de $\sim_{G'}$ où $G' = G - Y$.

(d) Montrer que $G[X]$ est fortement connexe.

(e) Montrer que $G[X]$ est une composante fortement connexe de G .

Solution (a) La relation \sim_G , dans sa définition même, est réflexive et symétrique. La transitivité de \sim_G vient du fait que, si u, v, w sont trois sommets de G , $P_{u,v}$ est un chemin de u à v et $P_{v,w}$ est un chemin de v à w , alors la concaténation $P_{u,v} + P_{v,w}$ est un chemin de u à w .

(b) Soient u et v deux sommets appartenant à X , P un (u, v) -chemin de G et w un sommet de P . On remarque qu'il existe une subdivision de P en deux sous-chemins P_1 de u à w et P_2 de w à v , et de plus, puisque u et v sont dans la même classe d'équivalence, il existe un chemin P_3 de v à u . Les chemins P_1 et $P_2 + P_3$ permettent de conclure que $u \sim_G w$ et donc que $w \in X$. Ainsi tous les sommets de P sont dans X .

(c) Soient x un sommet de X et X' la classe d'équivalence de $\sim_{G'}$ contenant x . Il faut montrer que $X' = X$.

Soit x' un sommet de X' c'est-à-dire tel que $x' \sim_{G'} x$. Puisque G' est un sous-graphe de G , tout chemin de G' est un chemin de G et donc on a $x' \sim_G x$, c'est-à-dire $x' \in X$ et ainsi $X' \subseteq X$.

Soit maintenant \bar{x} un sommet de X c'est-à-dire tel que $\bar{x} \sim_G x$. Par l'hypothèse $X \cap Y = \emptyset$ et par (b), tout chemin de G entre x et \bar{x} est un chemin de G' entre x et \bar{x} et donc on a $\bar{x} \sim_{G'} x$, c'est-à-dire $\bar{x} \in X'$ et ainsi $X \subseteq X'$.

(d) Puisque X est une classe d'équivalence de \sim_G , par définition, pour tout couple (u, v) de sommets de X , il existe un chemin de u à v dans G et donc dans $G[X]$ par (b). En conséquence, $G[X]$ est fortement connexe.

(e) Soit G' une composante fortement connexe de G qui contient un sommet de X . Par définition, d'une part, G' est fortement connexe, et donc tous ses sommets appartiennent à la même classe d'équivalence, c'est-à-dire à X , et d'autre part, il est maximal pour cette propriété, c'est-à-dire qu'il contient X puisque, par (d), $G[X]$ est fortement connexe. On en conclut que $G[X] = G'$ est une composante fortement connexe de G . \square

Remarque 80 Par l'Exercice 183, les ensembles des sommets des composantes fortement connexes de G coïncident avec la partition de $V(G)$ en classes d'équivalence de \sim_G .

On appelle **décomposition en composantes fortement connexes** de G la partition des sommets de G par les ensembles des sommets des composantes fortement connexes de G (Remarque 78) ou de manière équivalente (Remarque 80) la partition des sommets de G par les classes d'équivalence de \sim_G . En contractant les ensembles de la décomposition en composantes fortement connexes de G on obtient un graphe orienté dit **graphe orienté réduit** de G (FIG. 2.62).

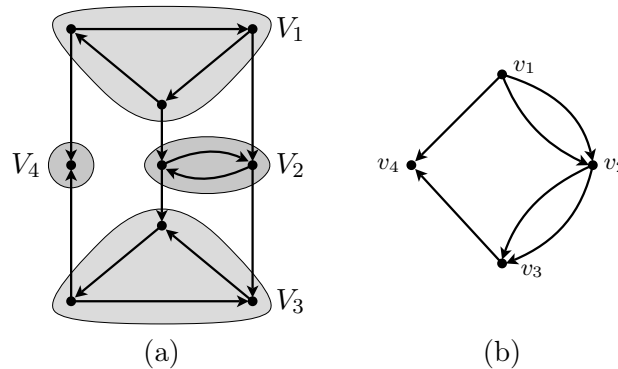


FIGURE 2.62 – (a) Un graphe orienté et ses composantes fortement connexes (b) son graphe orienté réduit.

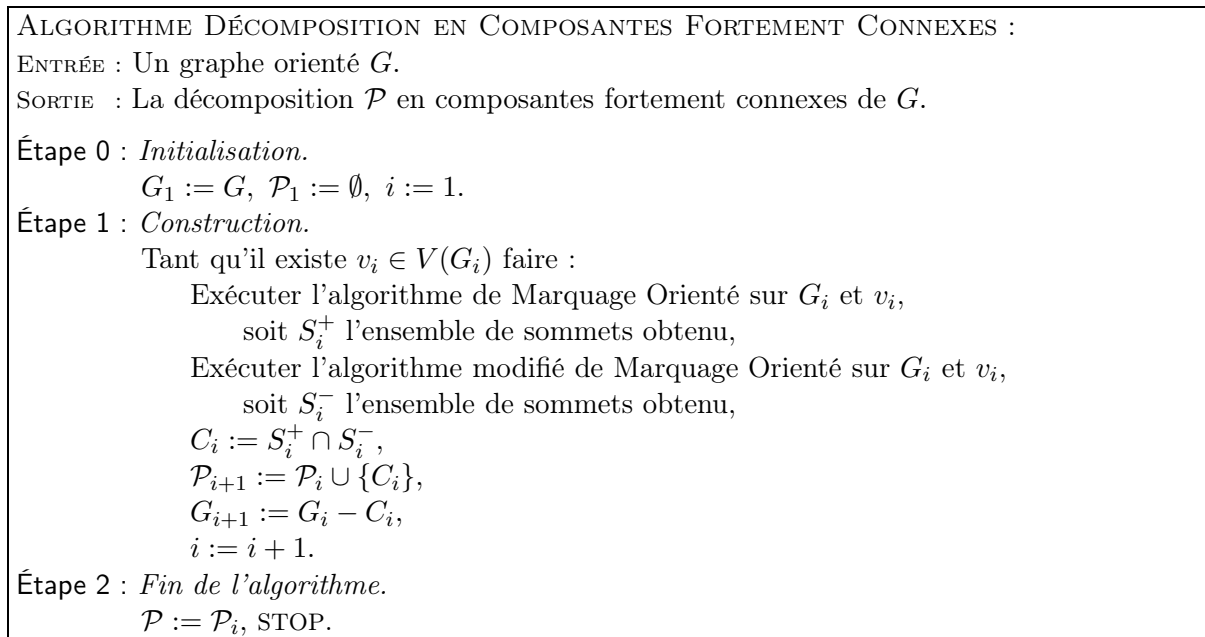


FIGURE 2.63 – Algorithme Décomposition en Composantes Fortement Connexes.

Exercice 184 Exécuter l'algorithme Décomposition en Composantes Fortement Connexes (FIG. 2.63) sur le graphe orienté de la FIG. 2.64.

Solution Une exécution de l'algorithme Décomposition en Composantes Fortement Connexes appliqué au graphe orienté de la FIG. 2.64 est représentée FIG. 2.65. Les ensembles de \mathcal{P} sont indiqués sur le dessin le plus à droite. \square

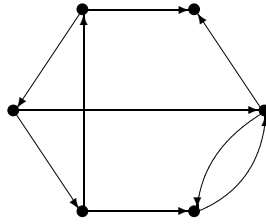


FIGURE 2.64 – Graphe orienté de l’Exercice 184.

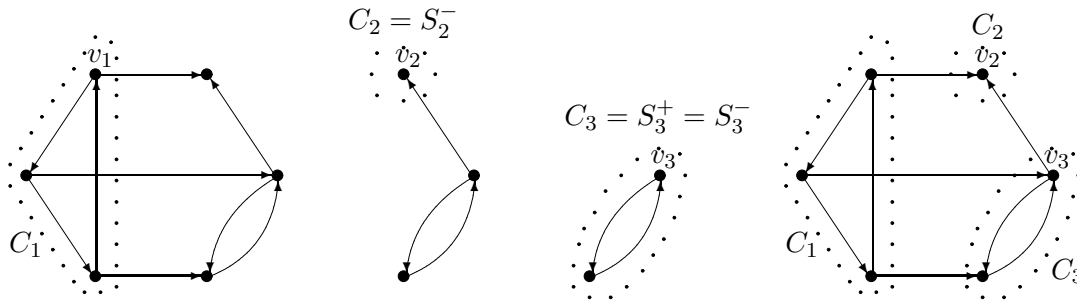


FIGURE 2.65 – Les différentes étapes de l’algorithme Décomposition en Composantes Fortement Connexes appliqué au graphe orienté de la FIG. 2.64.

Exercice 185 (Justification de l’algorithme Décomposition en Composantes Fortement Connexes (FIG. 2.63))

- (a) Montrer qu’à la i -ième itération de l’Étape 1, C_i est la classe d’équivalence de \sim_{G_i} qui contient v_i .
- (b) Montrer qu’à la i -ième itération de l’Étape 1, C_i est une classe d’équivalence de \sim_G .
- (c) En déduire que \mathcal{P} est la décomposition en composantes fortement connexes de G .

Solution (a) Par définition de l’algorithme Décomposition en Composantes Fortement Connexes et des algorithmes de Marquage Orienté (FIG. 2.63, 2.24 et 2.27), on a

$$\begin{aligned}
 C_i &= S_i^+ \cap S_i^- \\
 &= \{v \in V(G_i) : \text{il existe un chemin de } v_i \text{ à } v\} \cap \{v \in V(G_i) : \text{il existe un chemin de } v \text{ à } v_i\} \\
 &= \{v : v \sim_{G_i} v_i\}.
 \end{aligned}$$

(b) On va montrer (b) en raisonnant par récurrence sur i . Pour $i = 1$, par (a), C_1 est une classe d’équivalence de $\sim_{G_1=G}$. Supposons maintenant que la propriété est vérifiée jusqu’à $i - 1$: C_j est une classe d’équivalence de \sim_G pour $1 \leq j < i$. Soit X la classe d’équivalence de \sim_G qui contient v_i . Par l’Exercice 183(c) appliqué à G, X et $Y = \cup_{j=1}^{i-1} C_j$ (X et Y sont disjoints puisque les classes d’équivalence de \sim_G forment une partition de $V(G)$), on a que X est la classe d’équivalence de \sim_{G_i} qui contient v_i laquelle par (a), est égale à C_i . En conclusion, C_i est bien une classe d’équivalence de \sim_G .

(c) Par la définition de l’algorithme Décomposition en Composantes Fortement Connexes, les éléments de \mathcal{P} sont les C_i construits à l’Étape 1 et leur union est égale à $V(G)$. De plus, par (b), chaque C_i est une classe d’équivalence de \sim_G , ce qui termine la démonstration de (c). \square

Exercice 186 Montrer que le graphe orienté réduit d’un graphe orienté est sans circuit.

Solution Soient G un graphe orienté et G' le graphe orienté réduit de G . Supposons par l'absurde que G' possède un circuit $C' = v_1 a'_1 v_2 a'_2 \dots v_l a'_l$ où $l \geq 2$. Dans ce qui suit, l'indice i sera compris entre 1 et l et l'indice $l + 1$ sera considéré comme étant égal à 1. Par la définition du graphe orienté réduit, le sommet v_i correspond à une classe d'équivalence V_i de \sim_G et l'arc a'_i correspond à un arc a_i dans G , de $u_i \in V_i$ à $w_{i+1} \in V_{i+1}$. Puisque u_i et $w_i \in V_i$, il existe dans G un chemin P_i de w_i à u_i . On peut alors construire dans G un chemin de u_1 à w_1 qui contient w_2 , soit $P = u_1 a_1 P_2 a_2 \dots P_l a_l w_1$ (FIG. 2.66). Par l'Exercice 183(b), tous les sommets de P et en particulier w_2 sont dans V_1 , ce qui contredit le fait que $w_2 \in V_2 \neq V_1$.

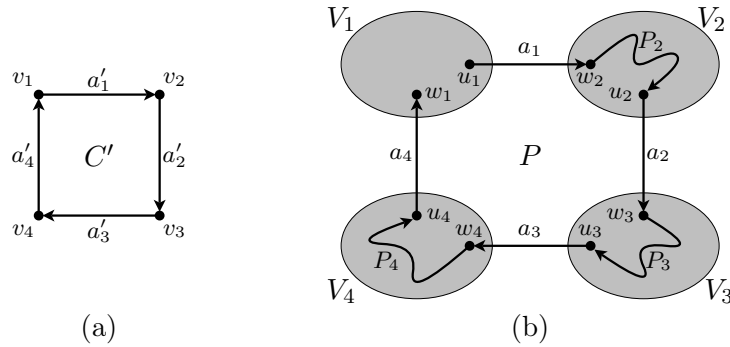


FIGURE 2.66 – (a) Le circuit C' dans G' , (b) la construction du chemin P dans G .

□

Exercice 187 Soit C un circuit d'un graphe orienté G . Montrer que le graphe orienté obtenu à partir de G par contraction de l'ensemble des sommets de C est fortement connexe si et seulement si G est fortement connexe.

Solution On notera G' le graphe orienté obtenu à partir de G par contraction de $V(C)$, et c le nouveau sommet de G' .

Montrons tout d'abord que la condition est nécessaire. Supposons donc que G' soit fortement connexe. Nous proposons deux démonstrations différentes, l'une basée sur des chemins et l'autre sur des coupes.

Première démonstration (voir FIG. 2.67). Nous allons montrer que tous les sommets de G appartiennent à la même composante fortement connexe ce qui est équivalent au fait que G est fortement connexe. Tout d'abord notons que par la Remarque 76, tous les sommets de C appartiennent à la même composante fortement connexe Q de G . Supposons par l'absurde qu'il existe un sommet v de G qui n'est pas dans Q . Par notre hypothèse, G' est fortement connexe et donc il existe dans G' un (v, c) -chemin élémentaire P'_1 et un (c, v) -chemin élémentaire P'_2 . Ces deux chemins correspondent dans G à un (v, c_1) -chemin P_1 et à un (c_2, v) -chemin P_2 pour deux sommets c_1 et c_2 de C . Puisque C est un circuit, il contient un (c_1, c_2) -chemin C_{12} . Alors dans G , on a un (c_1, v) -chemin, obtenu par la concaténation de C_{12} et P_2 , et un (v, c_1) -chemin, P_1 , c'est-à-dire que c_1 et v sont dans la même composante fortement connexe Q de G , ce qui est une contradiction.

Deuxième démonstration. Supposons par l'absurde que G ne soit pas fortement connexe. Alors par l'Exercice 178, il existe un sous-ensemble X de sommets de G , non-vide et ne contenant pas tous les sommets de G , tel qu'aucun arc de G ne sorte de X . Par conséquent, aucun arc de C ne sort de X . Selon la Remarque 76, C est fortement connexe, et donc par l'Exercice 178, $X \cap V(C)$ est soit vide soit égal à $V(C)$. Soit X' l'ensemble des images des sommets de X dans G' . Par ce

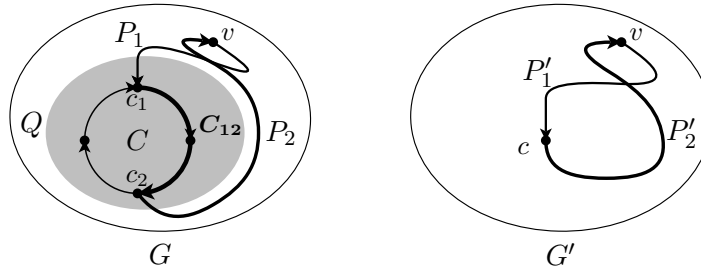


FIGURE 2.67 – Illustration de la première démonstration de l’Exercice 187.

qui précède on a que X' et $V(G') \setminus X'$ sont des ensembles non-vides disjoints tels qu’il n’existe pas d’arc sortant de X' . Par l’Exercice 178, ceci contredit la forte connexité de G' .

Pour montrer que la condition est suffisante supposons que G est fortement connexe. Nous proposons également deux démonstrations, l’une basée sur des chemins et l’autre sur des coupes.

Première démonstration. Soient (u', v') un couple quelconque de sommets de G' et u et v deux sommets de G dont les images dans G' sont respectivement u' et v' . Puisque G est fortement connexe, il existe un (u, v) -chemin dans G . Par l’Exercice 131, il existe alors un (u', v') -chemin dans G' et ainsi G' est fortement connexe.

Deuxième démonstration. Soit X' un sous-ensemble quelconque de sommets de G' , non-vide et ne contenant pas tous les sommets de G' . On définit l’ensemble X des sommets de G dont l’image est dans X' . Puisque G est fortement connexe, par l’Exercice 178, il contient un arc uv tel que $u \in X$ et $v \notin X$. Par la définition de X et celle de la contraction, l’image u' de u est dans X' , l’image v' de v n’est pas dans X' , et $u'v'$ est un arc de G' . On en conclut, par l’Exercice 178, que G' est fortement connexe. \square

Exercice 188 Soient G un graphe orienté, C l’ensemble des sommets d’un circuit de G , G' le graphe orienté obtenu à partir de G en contractant C , c le sommet de G' qui correspond à C , G_C la composante fortement connexe de G qui contient C et G'_c celle de G' qui contient c .

- (a) Montrer que G'_c s’obtient à partir de G_C en contractant C .
- (b) Montrer que les composantes fortement connexes de G et de G' sont les mêmes, à l’exception de G_C et G'_c .

Solution Remarquons que G_C existe car, par la Remarque 76, $G[C]$ est fortement connexe et donc tous ses sommets appartiennent à une même composante fortement connexe de G .

(a) On note W l’ensemble des sommets de G_C qui ne sont pas dans C , et W' l’ensemble des sommets de G'_c différents de c , on a donc $V(G_C) = W \cup C$ et $V(G'_c) = W' \cup \{c\}$. Démontrer (a) est équivalent à démontrer que $W = W'$.

Soit H' le graphe orienté obtenu à partir de G_C en contractant C , on a $V(H') = W \cup \{c\}$. D’après l’Exercice 187, H' est fortement connexe. Donc, par la Remarque 78, $V(H') \subseteq V(G'_c)$, et ainsi $W \subseteq W'$.

Soit H le graphe orienté obtenu à partir de G'_c en décontractant C , c’est-à-dire le sous-graphe de G induit par $W' \cup C$. D’après l’Exercice 187, H est fortement connexe. Par la Remarque 78, $V(H) \subseteq V(G_C)$, et ainsi $W' \subseteq W$.

On en conclut que $W = W'$.

(b) Par l'Exercice 183, les composantes fortement connexes de $G - V(G_C)$ sont celles de G qui sont différentes de G_C , et les composantes fortement connexes de $G' - V(G'_C)$ sont celles de G' qui sont différentes de G'_C . Or $G - V(G_C) = G' - V(G'_C)$, et ainsi (b) est démontré. \square

Exercice 189 Soient $H = (V, F)$ une RCPA-forêt d'arborescences d'un graphe orienté $G = (V, A)$, $H' = (V', F')$ une des arborescences de H et v sa racine. On note $S^-(v)$ l'ensemble des sommets à partir desquels on peut atteindre v par un chemin dans G et C_v l'ensemble $V' \cap S^-(v)$. Montrer que :

- (a) $H'[C_v]$ est une v -arborescence,
- (b) $G[C_v]$ est la composante fortement connexe de G qui contient v .

Solution Soit ℓ une numérotation de $V(H)$ telle que (H, ℓ) soit une RCPA-forêt d'arborescences de G numérotée.

(a) Par l'Exercice 141, il suffit de montrer que v est une racine de $H'[C_v]$. Par définition de C_v , v est un sommet de $H'[C_v]$. S'il n'y a pas d'autre sommet que v dans $H'[C_v]$ alors v est bien une racine. Sinon, soit $w \neq v$ un sommet de $H'[C_v]$. Par définition de $S^-(v)$, il existe dans G un chemin P de w à v . Soient P' le chemin de v à w dans H' et x un sommet quelconque de P' . $P'[v, x]$ est un chemin de v à x et la concaténation de $P'[x, w]$ et de P est un chemin de x à v et donc $x \in C_v$. Par conséquent P' est un chemin de v à w dans $H'[C_v]$ aussi, et v est bien une racine de $H'[C_v]$, (a) est démontré.

(b) Par la Remarque 80, la composante fortement connexe de G qui contient v est égale à $G[S^+(v) \cap S^-(v)]$, où $S^+(v)$ est l'ensemble des sommets qu'on peut atteindre depuis v par un chemin dans G . Pour prouver (b) il suffit donc de montrer que les sommets de $S^+(v)$ susceptibles d'être aussi dans $S^-(v)$ sont dans V' . Puisque $(H = (V, F), \ell)$ est une RCPA-forêt d'arborescences de G numérotée, par l'Exercice 162(a), aucun sommet de numéro plus petit que $\ell(v)$ n'est dans $S^-(v)$ et V' contient tous les sommets de $S^+(v)$ de numéro supérieur à $\ell(v)$. On en conclut que $C_v = V' \cap S^-(v) = S^+(v) \cap S^-(v)$ et (b) est démontré. \square

Exercice 190 Soient $H = (V, F)$ une RCPA-forêt d'arborescences d'un graphe orienté $G = (V, A)$, H' une arborescence de H de racine v , et W un sous-ensemble de sommets de $V(H')$ tel que $H'[W]$ soit une arborescence de racine v . Montrer que $H - W$ est une RCPA-forêt d'arborescences de $G - W$.

Solution On va montrer la propriété en raisonnant par récurrence sur le nombre de sommets de W . Si W ne contient qu'un sommet, il s'agit de v la racine commune de H' et $H'[W]$. Par l'Exercice 152(c), $H - v$ est une forêt d'arborescences. On définit sur les sommets de $H - v$, la numérotation $\ell'(x) = \ell(x)$ pour un sommet x de ℓ -numéro plus petit que celui de v et $\ell'(x) = \ell(x) - 1$ pour les autres. Puisque (H, ℓ) est une RCPA-forêt d'arborescences de G numérotée, G , H et ℓ satisfont les conditions de l'Exercice 162. On remarque que le sommet v étant la racine d'une arborescence de H , pour tout sommet $w \neq v$ de G , on a $H^{[w]} = (H - v)^{[w]}$. Il est alors facile de vérifier que $G - v$, $H - v$ et la numérotation ℓ' satisfont les conditions de l'Exercice 162 et $H - v$ est bien une RCPA-forêt d'arborescences de $G - v$.

Supposons maintenant que, pour $n \geq 1$, la propriété est vérifiée pour tout sous-ensemble de sommets de cardinalité n vérifiant les hypothèses de l'exercice. Soit W un sous-ensemble de $n + 1$ sommets de $V(H')$ tel que $H'[W]$ soit une arborescence de racine v . On peut alors choisir dans W un sommet pendant $w \neq v$ de $H'[W]$, et, par l'Exercice 143, $H'[W \setminus w]$ est une arborescence de racine v . Par l'hypothèse de récurrence, $H - (W \setminus w)$ est une RCPA-forêt d'arborescences de $G - (W \setminus w)$. Puisque $H[W] = H'[W]$ est une arborescence, l'unique prédécesseur de w dans

H n'existe plus dans $H - (W \setminus w)$ et ceci implique que w est racine d'une arborescence de $H - (W \setminus w)$. On utilise maintenant le fait que la propriété est vraie pour $n = 1$ pour en déduire que $H - W$ (qui est égal à $(H - (W \setminus w)) - w$) est une RCPA-forêt d'arborescences de $G - W$ (qui est égal à $(G - (W \setminus w)) - w$). \square

ALGORITHME DE COMPOSANTES FORTEMENT CONNEXES AVEC RCPA :

ENTRÉE : Un graphe orienté G .

SORTIE : La décomposition \mathcal{P} en composantes fortement connexes de G .

Étape 0 : *Initialisation.*
 $G_1 := G, \mathcal{P}_1 := \emptyset, i := 1.$

Étape 1 : *Parcours RCPA du graphe orienté.*
 Exécuter l'algorithme Recherche Complète en Profondeur d'Abord sur G pour obtenir une RCPA-forêt d'arborescences H .
 $\mathcal{H}_1 :=$ ensemble des arborescences de H .
 $R_1 :=$ ensemble des racines de \mathcal{H}_1 .

Étape 2 : *Construction de \mathcal{P} .*
 Tant qu'il existe $v_i \in R_i$ faire :
 $H_i :=$ l'arborescence de \mathcal{H}_i dont la racine est v_i ,
 Exécuter l'algorithme modifié de marquage orienté sur $G_i[V(H_i)]$ et v_i pour obtenir $C_i = V(H_i) \cap S_{v_i}^-$,
 $\mathcal{H}'_i :=$ ensemble des arborescences de la forêt d'arborescences de $H_i - C_i$,
 $R'_i :=$ ensemble des racines de \mathcal{H}'_i ,
 $\mathcal{H}_{i+1} := (\mathcal{H}_i - \{H_i\}) \cup \mathcal{H}'_i$,
 $R_{i+1} := (R_i - v_i) \cup R'_i$,
 $\mathcal{P}_{i+1} := \mathcal{P}_i \cup \{C_i\}$,
 $G_{i+1} := G_i - C_i$,
 $i := i + 1.$

Étape 3 : *Fin de l'algorithme.*
 $\mathcal{P} := \mathcal{P}_i$, STOP.

FIGURE 2.68 – Algorithme de Composantes Fortement Connexes avec RCPA.

Exercice 191 (Justification de l'algorithme de Composantes Fortement Connexes avec RCPA (FIG. 2.68)) *Montrer que, pour un graphe orienté G , \mathcal{P} est la décomposition en composantes fortement connexes de G .*

Solution Nous montrons par récurrence sur i que \mathcal{H}_i est l'ensemble des arborescences d'une RCPA-forêt d'arborescences de G_i . Pour $i = 1$, c'est vrai par définition. Supposons que c'est vrai pour i . D'après l'Exercice 189(a), $H_i[C_i]$ est une v_i -arborescence et alors par l'Exercice 190, \mathcal{H}_{i+1} est l'ensemble des arborescences d'une RCPA-forêt d'arborescences de G_{i+1} .

D'après l'Exercice 189(b), $G_i[C_i]$ est la composante fortement connexe de G_i qui contient v_i .

Pour terminer la preuve il suffit d'utiliser les mêmes démonstrations que pour (b) et (c) de l'Exercice 185. \square

Remarque 81 *On note qu'avec des bases de données adaptées l'Algorithme de Composantes Fortement Connexes avec RCPA se termine en temps linéaire du nombre d'arcs du graphe orienté donné. Tarjan a conçu un algorithme qui trouve les composantes fortement connexes en exécutant*

seulement un algorithme Recherche Complète en Profondeur d'Abord avec quelques instructions supplémentaires.

Soient $G = (V, A)$ un graphe orienté et uv un arc de G . L'opération de **subdivision de l'arc uv** consiste à supprimer l'arc uv , rajouter un nouveau sommet s et les deux arcs us et sv . On obtient ainsi un graphe orienté $G' = (V', A')$ où $V' = V \cup s$ et $A' = (A \setminus \{uv\}) \cup \{us, sv\}$.

Soient G un graphe orienté et O un chemin élémentaire dont seules les extrémités sont des sommets de G ou un circuit élémentaire dont un seul sommet appartient à G . L'opération de **rajout de l'oreille O** consiste à faire la réunion de G et O . La suite O_0, \dots, O_k est une **décomposition en oreilles orientées de G** , si O_0 est un sommet et G s'obtient à partir de O_0 en rajoutant consécutivement les oreilles O_1, \dots, O_k , voir FIG. 2.69. À cette décomposition en oreilles orientées on associera la suite de graphes orientés $G_0, \dots, G_k = G$ où $G_i = O_0 \cup \dots \cup O_i$. Par la définition de l'ajout d'une oreille, pour chaque $1 \leq i \leq k$, O_i est soit un chemin élémentaire dont seules les extrémités appartiennent à G_{i-1} , soit un circuit élémentaire dont un seul sommet appartient à G_{i-1} .

Remarque 82 L'ajout d'un arc entre deux sommets d'un graphe orienté G est un rajout d'oreille orientée.

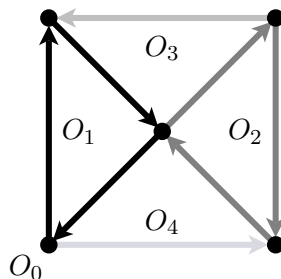


FIGURE 2.69 – Décomposition en oreilles orientées d'un graphe orienté G .

Exercice 192 (Justification de l'algorithme Décomposition en Oreilles Orientées (FIG. 2.70)) Montrer que :

- si l'algorithme s'arrête lors d'une exécution de l'Étape 1 ou de l'Étape 2, alors G n'est pas fortement connexe,
- l'indice j , tel qu'il est défini à l'Étape 1, existe,
- chaque O_{i+1} , calculé à la i -ième exécution de l'Étape 1, est soit un chemin élémentaire dont seules les extrémités appartiennent à V_i , soit un circuit élémentaire dont un seul sommet appartient à V_i ,
- si l'algorithme ne s'est pas arrêté lors d'une exécution de l'Étape 1 ou de l'Étape 2, alors il se termine avec une décomposition en oreilles orientées O_0, \dots, O_i .

Solution (a) Si l'algorithme s'arrête lors d'une exécution de l'Étape 1, alors dans G il n'existe pas de chemin du sommet v au sommet u , et ainsi par définition, G n'est pas fortement connexe. Sinon, à la dernière itération de l'Étape 1, l'ensemble de sommets V_i n'a pas d'arc sortant dans G . Ensuite, l'algorithme s'arrête à l'Étape 2 si et seulement si $V_i \neq V(G)$. Comme de plus, V_i contient s , il est non-vide. Par l'Exercice 178, V_i est un certificat que G n'est pas fortement connexe.

ALGORITHME DÉCOMPOSITION EN OREILLES ORIENTÉES :

ENTRÉE : Un graphe orienté G .

SORTIE : Une décomposition en oreilles orientées de G ou un certificat que G n'est pas fortement connexe.

Étape 0 : *Initialisation.*
 $V_0 := O_0 := s$ où s est un sommet quelconque de G , $i := 0$.

Étape 1 : *Détermination de longues oreilles* (FIG. 2.71).
 Tant qu'il existe $uv \in \delta^+(V_i)$ faire :
 Appliquer l'algorithme Chemin à G, v et u .
 Si on a obtenu un certificat S de non-existence d'un chemin de v à u dans G
 alors STOP.
 Sinon on a obtenu un chemin élémentaire P de v à u dans G , égal à
 $v_1(=v)v_2 \dots v_k(=u)$.
 Déterminer j le plus petit indice tel que $v_j \in V_i$,
 $O_{i+1} := uv + P[v, v_j]$,
 $V_{i+1} := V_i \cup V(O_{i+1})$,
 $i := i + 1$.

Étape 2 : *Détermination de courtes oreilles.*
 Si $V_i \neq V(G)$ alors STOP avec le certificat V_i .
 Tant qu'il existe $uv \in A(G) \setminus (A(O_1) \cup \dots \cup A(O_i))$ faire
 $O_{i+1} := uv$,
 $i := i + 1$.

Étape 3 : *Fin de l'algorithme.*
 STOP avec la décomposition en oreilles O_0, \dots, O_i .

FIGURE 2.70 – Algorithme Décomposition en Oreilles Orientées.

(b) À la i -ième exécution de l'Étape 1, si l'algorithme doit déterminer l'indice j , c'est qu'il existe un arc $uv \in \delta^+(V_i)$ et un chemin élémentaire $P = v_1 \dots v_k$ de v à u . Puisque $v = v_1$ n'appartient pas à V_i et $u = v_k$ appartient à V_i , il existe un plus petit indice j tel que $v_j \in V_i$, voir FIG. 2.71.

(c) Chaque O_{i+1} calculé à l'Étape 1 est la concaténation des chemins élémentaires uv et $P[v, v_j]$ qui par définition, sont tels que parmi leurs sommets seuls u et v_j appartiennent à V_i , voir FIG. 2.71. Selon que $u \neq v_j$ ou non, cette concaténation est un chemin élémentaire dont seules les extrémités appartiennent à V_i ou un circuit élémentaire dont un seul sommet appartient à V_i .

(d) L'Étape 1 se termine parce que chaque V_{i+1} contient plus de sommets que V_i , et que le nombre de sommets de G est fini ; soit k le nombre d'itérations de l'Étape 1. Si l'algorithme ne s'est pas arrêté lors d'une exécution de l'Étape 1 ou de l'Étape 2, alors $V_k = V(G)$. Chaque O_{i+1} calculé à l'Étape 2 est un arc de G qui n'appartient à aucun O_j ($j \leq i$). Le nombre d'arcs de G est fini et donc l'Étape 2 se termine avec O_0, \dots, O_i qui forment une partition des arcs de G . Par (c), O_0, \dots, O_k est une décomposition en oreilles de la réunion de O_0, \dots, O_k ; par $V_k = V(G)$ et par la Remarque 82, O_0, \dots, O_i est une décomposition en oreilles de G . \square

Exercice 193 (Caractérisation de l'existence d'une décomposition en oreilles orientées) Soit G un graphe orienté. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) G admet une décomposition en oreilles orientées,
- (b) G peut être construit à partir d'un sommet par une suite d'ajouts ou de subdivisions d'arc,

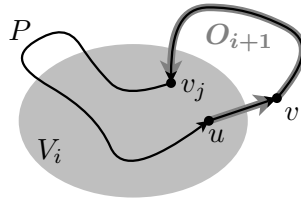


FIGURE 2.71 – Illustration de la construction d’une longue oreille de l’algorithme Décomposition en Oreilles Orientées (FIG. 2.70).

(c) G est fortement connexe.

Solution (a) \implies (b) : Supposons que G admette une décomposition en oreilles orientées O_0, O_1, \dots, O_k . L’opération d’ajout d’oreille O_i de u_i à v_i de longueur t à G_i est équivalente à la suite d’opérations suivante : ajout de l’arc $u_i v_i$, suivi par $t - 1$ subdivisions d’arc.

(b) \implies (c) : Puisque le graphe orienté à un sommet est fortement connexe, il suffit de montrer que les opérations d’ajout ou subdivision d’arc préservent la forte connexité. Soit donc G un graphe orienté fortement connexe. L’ajout d’un arc à G , d’après la Remarque 77, préserve bien la forte connexité.

La subdivision d’un arc uv de G , produit un graphe orienté G' en rajoutant un nouveau sommet s et les nouveaux arcs us et sv , et en supprimant l’arc uv . Par la Remarque 75, G est connexe. Par la Remarque 11, le graphe orienté obtenu après ajout de s , us et sv est aussi connexe. Or l’arc uv appartient à un cycle suw , donc d’après l’Exercice 31, quand on supprime cet arc le graphe orienté reste connexe.

Par l’Exercice 179, il reste à démontrer que chaque arc de G' appartient à un circuit de G' . Puisque G est fortement connexe, par l’Exercice 179, chaque arc e de G appartient à un circuit C_e de G . Or à chaque circuit C de G on peut associer un circuit C' de G' en remplaçant éventuellement l’arc uv par le chemin usv . Les arcs us et sv appartient au circuit C'_{uv} de G' et tout autre arc e de G' appartient au circuit C'_e de G' .

(c) \implies (a) : Par l’Exercice 192(a) et (d), si G est fortement connexe alors l’algorithme Décomposition en Oreilles Orientées (FIG. 2.70) construit une décomposition en oreilles orientées de G . □

2.10 Tournois

Etant donné un graphe orienté G , un **chemin hamiltonien** de G est un chemin élémentaire contenant tous les sommets de G ; un **circuit hamiltonien** de G est un circuit élémentaire contenant tous les sommets de G .

Un **tournoi** est un graphe orienté simple G tel que pour toute paire x, y de sommets distincts, exactement un des deux arcs xy et yx existe dans G .

Exercice 194 Montrer que tout tournoi possède un sommet x tel que chaque sommet est à distance au plus deux de x .

Solution Soient G un tournoi et x un sommet de G de degré sortant maximum. Soient V_1 l’ensemble des voisins sortant de x (c’est-à-dire les sommets à distance un de x) et V_2 l’ensemble

des sommets de G qui sont à distance deux de x . Supposons par l'absurde qu'il existe un sommet y qui n'appartient pas à $\{x\} \cup V_1 \cup V_2$. Alors dans G il n'y a aucun arc d'un sommet de $\{x\} \cup V_1$ à y , et, puisque G est un tournoi, il y a un arc de y à chacun des sommets de $\{x\} \cup V_1$. Donc $d^+(y) \geq |V_1 \cup x| > |V_1| = d^+(x)$, ce qui contredit notre hypothèse sur x . \square

Exercice 195 *Montrer que tout tournoi G possède un chemin hamiltonien.*

Solution Soit $P := v_1 \dots v_k$ un plus long chemin élémentaire de G . On montrera que P est un chemin hamiltonien.

Supposons par l'absurde qu'il existe un sommet x de G qui n'appartient pas à P .

Si xv_1 était un arc de G alors $xv_1 + P$ serait un chemin élémentaire plus long que P ce qui contredit notre hypothèse sur P (voir FIG. 2.72(a)). Alors, puisque G est un tournoi, v_1x est un arc de G . De même si v_kx était un arc de G alors $P + v_kx$ serait un chemin élémentaire plus long que P ce qui contredit notre hypothèse sur P (voir FIG. 2.72(c)). Alors, puisque G est un tournoi, xv_k est un arc de G et $k \neq 1$.

Soit i l'indice minimum tel que v_ix et xv_{i+1} sont des arcs de G . Par ce qui précède, cet indice existe et $1 \leq i \leq k - 1$. Alors $P[v_1, v_i] + v_ix + xv_{i+1} + P[v_{i+1}, v_k]$ serait un chemin élémentaire plus long que P ce qui contredit notre hypothèse sur P (voir FIG. 2.72(b)).

En conclusion x n'existe pas et ainsi P est un chemin hamiltonien de G .

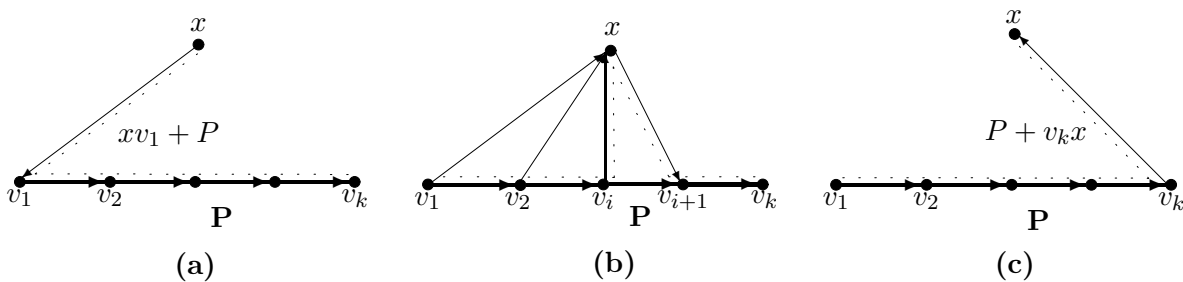


FIGURE 2.72 – Illustration de la solution de l'Exercice 195.

\square

Exercice 196 *Montrer qu'un tournoi $G = (V, A)$ possède un circuit hamiltonien si et seulement si G est fortement connexe.*

Solution Montrons tout d'abord que la condition est nécessaire. Soit donc C un circuit hamiltonien de G . Alors tous ses sommets appartiennent à la même composante fortement connexe c'est-à-dire G est fortement connexe.

On montre maintenant que la condition est suffisante. Soit donc G un tournoi fortement connexe. Alors, d'après l'Exercice 178, on a

$$d^+(X) \geq 1 \text{ pour tout } \emptyset \neq X \subset V. \tag{2.21}$$

Alors, d'après l'Exercice 132(a), G possède un circuit élémentaire. Soit $C := v_0v_1 \dots (v_k = v_0)$, où $k \geq 2$, un plus long circuit élémentaire de G . On montrera que C est un circuit hamiltonien. Supposons par l'absurde que $V(C) \neq V$. Soit $x \in V \setminus V(C)$.

Supposons qu'il existe deux sommets y et z de C tels que yx et xz sont des arcs G . Puisque G est un tournoi, $y \neq z$. Par la Remarque 48, on peut supposer que $y = v_0$ (quitte à renuméroter les sommets de C). Soit i le plus petit indice tel que v_ix et xv_{i+1} sont des arcs G . Par ce qui

précède, cet indice existe. Alors $C[v_0, v_i] + v_i x + x v_{i+1} + C[v_{i+1}, v_k]$ serait un circuit élémentaire plus long que C ce qui contredit notre hypothèse sur C (voir FIG. 2.73(a)). Puisque G est un tournoi, on en conclut que $V = V(C) \cup V_1 \cup V_2$ où $V_1 := \{x \in V : v_i x \in A \text{ pour tout } v_i \in V(C)\}$ et $V_2 := \{x \in V : x v_i \in A \text{ pour tout } v_i \in V(C)\}$.

Comme $\emptyset \neq V(C) \subset V$, par (2.21), on a $d^+(V(C)) \geq 1$. On en déduit que $V_1 \neq \emptyset$ et ainsi $d^+(V_1) \geq 1$ par (2.21), c'est-à-dire qu'il existe un arc $u_1 u_2$ tel que $u_1 \in V_1$ et $u_2 \in V_2$. Alors $C' := v_0 u_1 + u_1 u_2 + u_2 v_1 + C[v_1, v_k]$ est un circuit élémentaire qui est plus long que C , ce qui contredit notre hypothèse sur C (voir FIG. 2.73(b)).

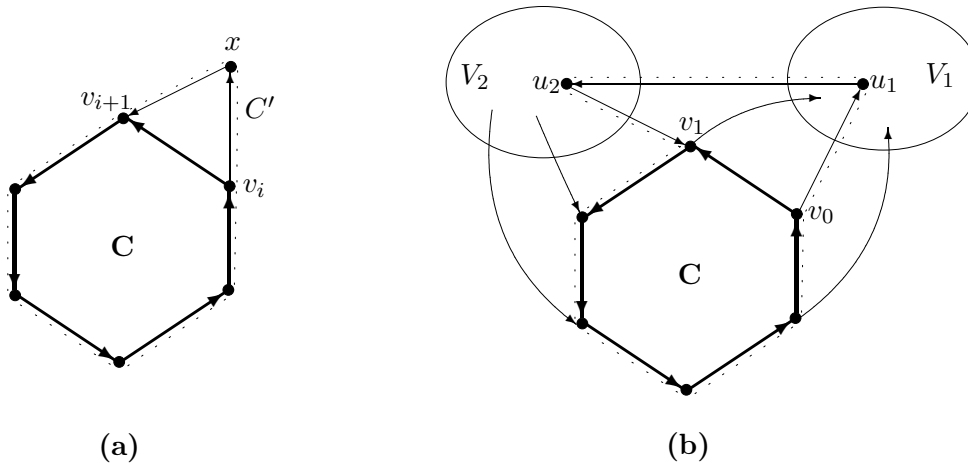


FIGURE 2.73 – Illustration de la solution de l'Exercice 195.

□

2.11 Plus courts chemins

Étant donné un graphe orienté $G = (V, A)$, une **fonction de longueur sur les arcs** de G , $\ell : A \rightarrow \mathbb{R}$, est l'affectation d'une valeur $\ell(e)$ à chaque arc e de G . Un graphe orienté G muni d'une fonction ℓ de longueur sur les arcs est appelé **réseau** et est noté (G, ℓ) . Un réseau (G, ℓ) où $\ell(a) = 1$ pour tout arc a de G sera appelé **réseau $(G, \mathbb{1})$** .

Étant donné un réseau (G, ℓ) et un chemin $P = v_0 a_1 v_1 a_2 v_2 \dots a_k v_k$ de G , on appelle **ℓ -longueur** de P (ou **longueur** s'il n'y a pas d'ambiguïté), notée $\ell(P)$, comme la somme des longueurs des arcs de P :

$$\ell(P) = \sum_{i=1}^k \ell(a_i).$$

Remarque 83 Dans un graphe G , la $\mathbb{1}$ -longueur d'un chemin est égale au nombre d'arcs de ce chemin.

Étant donné deux sommets s et p d'un réseau (G, ℓ) , un **plus court chemin** de s à p est un chemin de ℓ -longueur minimum parmi tous les chemins de s à p . Dans cette section nous nous intéressons à la recherche d'un plus court (s, p) -chemin dans (G, ℓ) . Notons qu'on peut décider s'il existe au moins un (s, p) -chemin dans G par l'algorithme de Marquage orienté (FIG. 2.24).

Remarque 84 On note que l'on peut se restreindre dans cette section au cas des graphes orientés sans arcs multiples car si tel n'est pas le cas on peut conserver seulement l'arc de ℓ -longueur minimum pour chaque arc multiple sans modifier les plus courts chemins.

Un circuit C est dit **absorbant** si sa ℓ -longueur est négative, c'est-à-dire $\ell(C) < 0$, voir FIG. 2.74.

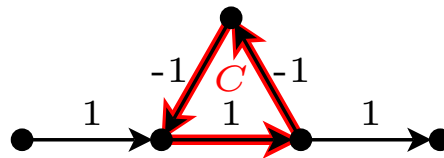


FIGURE 2.74 – Un exemple de réseau contenant un circuit absorbant C

Remarque 85 Si dans un réseau il y a un circuit absorbant C , alors pour certains couples (x, y) de sommets il n'existe pas de plus court (x, y) -chemin. Par exemple, si x et y sont deux sommets de C , en empruntant C plusieurs fois, on peut obtenir des (x, y) -chemins dont les ℓ -longueurs tendent vers $-\infty$.

Remarque 86 Lorsque le réseau contient un circuit absorbant, la Remarque 85 suggère de rechercher plutôt un plus court chemin élémentaire d'un sommet donné à un autre. Or ce problème est connu être difficile, plus précisément NP-complet, voir Chapitre ???

Exercice 197 Soient (G, ℓ) un réseau et s et p deux sommets de G tels qu'il existe un (s, p) -chemin dans G .

- (a) Montrer que parmi les (s, p) -chemins élémentaires il en existe au moins un de ℓ -longueur minimum dans (G, ℓ) .

(b) En déduire que si (G, ℓ) est sans circuit absorbant alors il existe un (s, p) -chemin de ℓ -longueur minimum dans (G, ℓ) qui de plus est élémentaire.

Solution (a) Puisque G a un nombre fini m d'arcs, et qu'un (s, p) -chemin élémentaire est une suite constituée d'au plus m arcs, le nombre de (s, p) -chemins élémentaires dans G est fini ($\leq 2^m$). Il existe donc un (s, p) -chemin élémentaire de ℓ -longueur minimum. (Néanmoins, trouver ce chemin est en général difficile, voir la Remarque 86.)

(b) Par (a), il existe un (s, p) -chemin élémentaire P^* de ℓ -longueur minimum dans (G, ℓ) . Si P^* n'est pas un (s, p) -chemin de ℓ -longueur minimum dans (G, ℓ) , alors il existe un (s, p) -chemin non-élémentaire et de ℓ -longueur strictement plus petite que $\ell(P^*)$. Soit $P = sa_1v_1a_2v_2 \dots a_kp$ un tel chemin qui minimise k . Puisque P n'est pas élémentaire, il existe $1 \leq i < j \leq k$ tels que $v_i = v_j$ et pour tout $(i', j') \neq (i, j)$ avec $i \leq i' < j' \leq j$, on a $v_{i'} \neq v_{j'}$. Alors $C = P[v_i, v_j]$ est un circuit élémentaire tel que $\ell(C) \geq 0$ (puisque (G, ℓ) est sans circuit absorbant). En conséquence, $P' = P[s, v_i] + P[v_j, p]$ est un (s, p) -chemin $sa'_1v'_1a'_2v'_2 \dots a'_kp$ tel que $\ell(P') = \ell(P) - \ell(C) \leq \ell(P) < \ell(P^*)$ et $k' < k$, ce qui contredit la définition de k . \square

Remarque 87 Par les Remarques 85 et 86 et l'Exercice 197, on étudiera dans la suite de cette section les plus courts chemins élémentaires dans des réseaux sans circuits absorbants ou bien on considèrera la détection d'un circuit absorbant.

Remarque 88 Lorsqu'on considère le problème des plus courts chemins dans un réseau (G, ℓ) , on peut se restreindre, sans perte de généralité, au cas où G est sans boucles. En effet, s'il existe une boucle de ℓ -longueur négative dans (G, ℓ) alors cette boucle est un circuit absorbant et sinon en supprimant toutes les boucles de G on ne change pas les plus courts chemins dans (G, ℓ) .

Soient (G, ℓ) un réseau sans circuit absorbant, s et p deux sommets de G . S'il existe un (s, p) -chemin dans G alors il existe, par l'Exercice 197, un (s, p) -chemin de ℓ -longueur minimum dans (G, ℓ) . On définit la **distance** de s à p , notée $d_{(G, \ell)}(s, p)$, comme égale à la ℓ -longueur minimum d'un (s, p) -chemin dans (G, ℓ) s'il existe un (s, p) -chemin dans G et à ∞ sinon.

Remarque 89 Dans un réseau sans circuits absorbants, puisque la longueur de chaque arc est finie, la distance d'un sommet s à un sommet p est infinie si et seulement si il n'y a pas de (s, p) -chemin.

Remarque 90 Quand on s'intéresse au problème du calcul des distances $d_{(G, \ell)}(s, \cdot)$ depuis s dans un réseau (G, ℓ) , on peut toujours se restreindre au cas où s est une racine de G . En effet, par l'algorithme de Marquage orienté (FIG.2.24), on peut trouver l'ensemble S des sommets atteignables depuis s et ensuite effacer les autres sommets. Ainsi on a exactement tous les sommets dont la distance depuis s est finie (Remarque 89) et s est une racine du graphe $G[S]$.

Exercice 198 Soient (G, ℓ) un réseau sans circuit absorbant, P un plus court chemin de s à p et $P[x, y]$ un sous-chemin de P de x à y . Montrer que $P[x, y]$ est un plus court chemin de x à y .

Solution Supposons que $P[x, y]$ ne soit pas un plus court chemin de x à y . Il existe alors un chemin Q de x à y tel que $\ell(Q) < \ell(P[x, y])$. Donc en remplaçant $P[x, y]$ par Q dans P , on obtient le chemin $R := P[s, x] + Q + P[y, p]$ de s à p , de ℓ -longueur $\ell(R) = \ell(P) - \ell(P[x, y]) + \ell(Q) < \ell(P)$, ce qui contredit le fait que P est un plus court chemin de s à p . \square

Exercice 199 Donner un exemple d'un graphe non-orienté G avec une fonction ℓ de longueur des arêtes, sans cycle de ℓ -longueur négative, et dans lequel la sous-chaîne de x à y d'une plus courte (s, p) -chaîne n'est pas une plus courte chaîne de x à y .

Solution Soient G et ℓ le graphe et les longueurs représentés FIG.2.75. Dans ce graphe non-orienté xyz est une chaîne de $s = x$ à $p = z$ de ℓ -longueur minimum mais xy n'est pas une chaîne de x à y de ℓ -longueur minimum car xzy est plus courte.

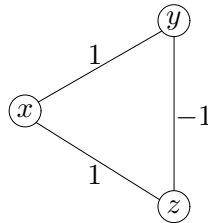


FIGURE 2.75 – Un exemple de solution de l'Exercice 199.

□

Exercice 200 Soient $(G = (V, A), \ell)$ un réseau, X et Y deux sous-ensembles de V disjoints. Montrer que le problème de trouver un plus court chemin parmi les chemins qui relient un sommet de X à un sommet de Y peut se résoudre en trouvant un plus court (s, p) -chemin dans un réseau auxiliaire.

Solution On introduit le réseau auxiliaire $(G' = (V', A'), \ell')$ (voir FIG. 2.76) où

$$V' = V \cup \{s, p\}, A' = A \cup \{sx : x \in X\} \cup \{yp : y \in Y\} \text{ et } \ell'(e) = \begin{cases} \ell(e) & \text{si } e \in A \\ 0 & \text{si } e \in A' \setminus A. \end{cases}$$

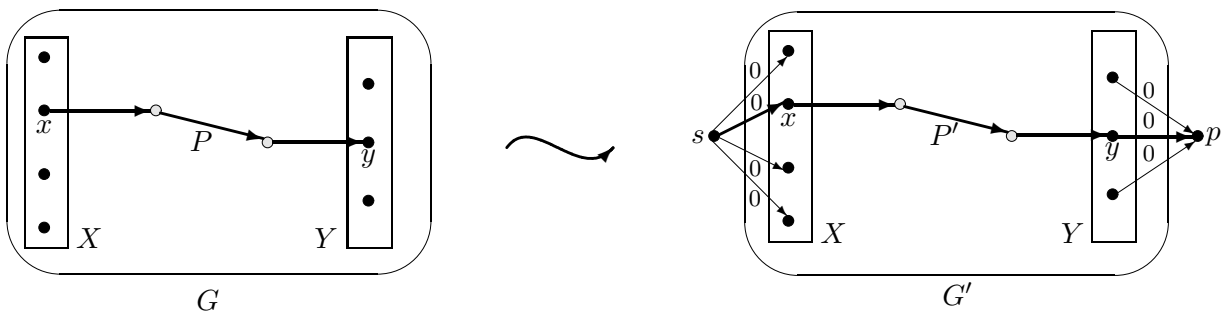


FIGURE 2.76 – Construction du réseau auxiliaire utilisé dans la solution de l'Exercice 200.

Un plus court (s, p) -chemin dans (G', ℓ') correspond à un plus court chemin dans (G, ℓ) de X à Y . En effet, d'une part, si P' est un (s, p) -chemin dans (G', ℓ') alors $P := P' - \{s, p\}$ est un chemin dans (G, ℓ) d'un sommet $x \in X$ à un sommet $y \in Y$ de même longueur que P' . D'autre part, si P est un chemin dans (G, ℓ) d'un sommet $x \in X$ à un sommet $y \in Y$ alors $P' := sx + P + yp$ est un (s, p) -chemin dans (G', ℓ') de même longueur que P . On a donc défini une bijection, entre les (s, p) -chemins dans (G', ℓ') et les chemins de X à Y dans (G, ℓ) , qui conserve les longueurs.

□

2.11.1 Potentiel

Exercice 201 Soient (G, ℓ) un réseau sans circuit absorbant, s un sommet et uv un arc de G . Montrer que

$$d_{(G, \ell)}(s, v) \leq d_{(G, \ell)}(s, u) + \ell(uv). \quad (2.22)$$

Solution Si $d_{(G, \ell)}(s, u) = \infty$, alors l'inégalité (2.22) est évidemment vérifiée. Sinon, par la définition de la distance, il existe dans G un (s, u) -chemin P de ℓ -longueur égale à $d_{(G, \ell)}(s, u)$. Puisque $P' := P + uv$ est un (s, v) -chemin, par définition de $d_{(G, \ell)}$, on a $d_{(G, \ell)}(s, v) \leq \ell(P')$. De plus, $\ell(P') = \ell(P) + \ell(uv) = d_{(G, \ell)}(s, u) + \ell(uv)$, d'où l'inégalité (2.22). \square

Exercice 202 Soient $(G = (V, A), \ell)$ un réseau sans circuit absorbant et s un sommet de G . Montrer que pour tout sommet v de G , distinct de s ,

$$d_{(G, \ell)}(s, v) = \min\{d_{(G, \ell)}(s, u) + \ell(uv) : uv \in A\}. \quad (2.23)$$

Solution Soit v un sommet quelconque de G , distinct de s . Par (2.22) de l'Exercice 201, on a

$$d_{(G, \ell)}(s, v) \leq \min\{d_{(G, \ell)}(s, u) + \ell(uv) : uv \in A\}.$$

Si $d_{(G, \ell)}(s, v) = \infty$ on en déduit que le minimum de (2.23) est égal à ∞ aussi et (2.23) est bien vérifiée. Sinon, soient P un (s, v) -chemin de ℓ -longueur minimum dans G et xv son dernier arc (ce chemin existe puisque $d_{(G, \ell)}(s, v) \neq \infty$ et cet arc existe puisque $v \neq s$). On a alors

$$d_{(G, \ell)}(s, v) = \ell(P) = \ell(P[s, x]) + \ell(xv) \geq d_{(G, \ell)}(s, x) + \ell(xv) \geq \min\{d_{(G, \ell)}(s, u) + \ell(uv) : uv \in A\}.$$

Les deux inégalités précédentes impliquent l'égalité (2.23). \square

Étant donné un réseau $(G = (V, A), \ell)$, une fonction $\pi : V \rightarrow \mathbb{R}$ est un **potentiel** de (G, ℓ) si la condition suivante est satisfaite.

$$\pi(v) - \pi(u) \leq \ell(uv) \quad \text{pour tout } uv \in A. \quad (2.24)$$

Remarque 91 Dans un réseau (G, ℓ) sans circuit absorbant et de racine s , par la Remarque 89, les distances depuis s sont finies et alors, par l'Exercice 201, la fonction de distance depuis s est un potentiel.

Exercice 203 Dans un réseau (G, ℓ) , soient π un potentiel et P un (s, p) -chemin. Montrer que

$$\pi(p) - \pi(s) \leq \ell(P). \quad (2.25)$$

Solution On pose $P = v_1 v_2 \dots v_k$ où $v_1 = s$ et $v_k = p$. Par définition d'un potentiel et puisque les termes de la somme des différences de potentiel s'annulent deux-à-deux à l'exception de $\pi(s)$ et $\pi(p)$, on a

$$\pi(p) - \pi(s) = \pi(v_k) - \pi(v_1) = \sum_{i=1}^{k-1} (\pi(v_{i+1}) - \pi(v_i)) \leq \sum_{i=1}^{k-1} \ell(v_i v_{i+1}) = \ell(P). \quad \square$$

Exercice 204 Soient $(G = (V, A), \ell)$ un réseau et $(G' = (V', A'), \ell')$ le réseau obtenu à partir de (G, ℓ) en ajoutant un nouveau sommet s et un arc sv de ℓ' -longueur 0 pour chaque sommet $v \in V$; les autres arcs ont leur ℓ' -longueur égale à leur ℓ -longueur. Montrer que

- (a) s est une racine de G' ,
 (b) (G', ℓ') est un réseau sans circuit absorbant si et seulement si (G, ℓ) est un réseau sans circuit absorbant,
 (c) s'il existe un potentiel de (G', ℓ') alors il en existe un pour (G, ℓ) aussi.

Solution (a) Par construction, pour chaque sommet $v \neq s$ de G' , il existe, un (s, v) -chemin constitué de l'arc sv , s est donc une racine de G' .

(b) Par construction, $d_{G'}^-(s) = 0$, et donc s n'appartient à aucun circuit. Par conséquent, les circuits de G' sont les mêmes que ceux de G et ils ont les mêmes longueurs. Alors, (b) est bien vérifié.

(c) Soit π' un potentiel de (G', ℓ') . Alors, par la définition d'un potentiel, on a

$$\pi'(v) - \pi'(u) \leq \ell'(uv) \quad \text{pour tout } uv \in A'. \quad (2.26)$$

On pose $\pi(v) := \pi'(v)$ pour tout $v \in V \subseteq V'$. Pour chaque arc $uv \in A \subseteq A'$, on a $\ell'(uv) = \ell(uv)$ donc (2.26) implique (2.24) :

$$\pi(v) - \pi(u) = \pi'(v) - \pi'(u) \leq \ell'(uv) = \ell(uv).$$

On en conclut que π est un potentiel de (G, ℓ) . □

Exercice 205 (Théorème de Gallai, caractérisation des graphes sans circuit absorbant) Montrer qu'un réseau (G, ℓ) est sans circuit absorbant si et seulement si il existe un potentiel de (G, ℓ) .

Solution Montrons tout d'abord que la condition est suffisante. Soient donc π un potentiel de G et C un circuit quelconque de G . Puisque C est un (s, s) -chemin pour n'importe quel sommet s de C , par l'Exercice 203, on a $0 = \pi(s) - \pi(s) \leq \ell(C)$. Donc (G, ℓ) ne contient pas de circuit absorbant.

Maintenant nous montrons que la condition est nécessaire. Supposons donc que (G, ℓ) est sans circuit absorbant. On distingue deux cas :

Cas 1. G possède une racine s . Par la Remarque 91, la fonction de distance depuis s dans (G, ℓ) est un potentiel de (G, ℓ) .

Cas 2. G ne possède pas de racine. En utilisant la construction décrite dans l'Exercice 204, on obtient, par l'Exercice 204(a), un réseau (G', ℓ') qui possède une racine. Par l'Exercice 204(b), ce réseau est sans circuit absorbant. Par le Cas 1, (G', ℓ') possède un potentiel, et alors par l'Exercice 204(c), (G, ℓ) aussi possède un potentiel. □

Exercice 206 (Théorème de Duffin) Soient (G, ℓ) un réseau sans circuit absorbant et s un sommet de G . Montrer que pour chaque sommet p de G atteignable depuis s , on a

$$\min\{\ell(P) : P \text{ } (s, p)\text{-chemin de } G\} = \max\{\pi(p) - \pi(s) : \pi \text{ potentiel de } (G, \ell)\}.$$

Solution Pour tout (s, p) -chemin P et pour tout potentiel π de (G, ℓ) , par l'Exercice 203, on a $\ell(P) \geq \pi(p) - \pi(s)$, donc $\min\{\ell(P) : P \text{ } (s, p)\text{-chemin}\} \geq \max\{\pi(p) - \pi(s) : \pi \text{ potentiel}\}$. Pour obtenir l'égalité il est suffisant d'exhiber un (s, p) -chemin P^* et un potentiel π^* de (G, ℓ) tels que $\ell(P^*) = \pi^*(p) - \pi^*(s)$.

Soient P^* un (s, p) -chemin de ℓ -longueur minimum et π^* la fonction définie par $\pi^*(\cdot) = d_{(G, \ell)}(s, \cdot)$. Par la Remarque 91, π^* est un potentiel. Puisque (G, ℓ) est sans circuit absorbant, $d_{(G, \ell)}(s, s) = 0$. Par définition, $\ell(P^*) = d_{(G, \ell)}(s, p) - 0 = \pi^*(p) - \pi^*(s)$ et la démonstration est terminée. □

Remarque 92 Par l'Exercice 206, si P est un (s, p) -chemin et π est un potentiel de (G, ℓ) tels que $\ell(P) = \pi(p) - \pi(s)$, alors P est un (s, p) -chemin de ℓ -longueur minimum.

Remarque 93 Par définition du potentiel, en rajoutant une constante à un potentiel π d'un réseau (G, ℓ) on obtient à nouveau un potentiel de (G, ℓ) . Ainsi dans le théorème min-max de l'Exercice 206, on peut fixer la valeur du potentiel à un sommet donné quelconque.

Exercice 207 Etant donné un réseau (G, ℓ) sans circuit absorbant et un potentiel π de (G, ℓ) , montrer qu'on peut définir une fonction longueur $\ell' \geq 0$ sur les arcs de G telle que les plus courts chemins dans (G, ℓ) et dans (G, ℓ') sont les mêmes.

Solution On associe à tout $uv \in A(G)$ une nouvelle longueur :

$$\ell'(uv) := \ell(uv) + \pi(u) - \pi(v). \quad (2.27)$$

Puisque π est un potentiel, d'après (2.24), on a $\ell'(uv) \geq 0$. Soient s et p deux sommets de G . Pour tout chemin $P = v_1 v_2 \dots v_k$ où $v_1 = s$ et $v_k = p$ de G , par (2.27), on a

$$\begin{aligned} \ell'(P) &= \sum_{i=1}^{k-1} \ell'(v_i v_{i+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} (\ell(v_i v_{i+1}) + \pi(v_i) - \pi(v_{i+1})) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \ell(v_i v_{i+1}) + \sum_{i=1}^{k-1} (\pi(v_i) - \pi(v_{i+1})) \\ &= \ell(P) + \pi(s) - \pi(p). \end{aligned}$$

D'où, la ℓ' -longueur de P est égale à la ℓ -longueur de P plus une valeur qui ne dépend que des extrémités de P . Ainsi P est un (s, p) -chemin de ℓ' -longueur minimum si et seulement si P est un (s, p) -chemin de ℓ -longueur minimum. Il est donc suffisant de résoudre le problème des plus courts chemins dans (G, ℓ') où la fonction de longueur ℓ' est non-négative. \square

2.11.2 Arborescence de plus courts chemins

Une s -arborescence de plus courts chemins de (G, ℓ) est une s -arborescence F de G telle que $V(F) = \{v \in V(G) : d_{(G, \ell)}(s, v) \neq \infty\}$ et le chemin unique de s à v dans F est de ℓ -longueur égale à $d_{(G, \ell)}(s, v)$ pour tout $v \in V(F)$.

Remarque 94 On verra dans l'Exercice 211 qu'un réseau (G, ℓ) sans circuit absorbant contient une s -arborescence de plus courts chemins pour tout sommet s de G .

Pour un potentiel π d'un réseau (G, ℓ) , un arc uv est dit π -serré si $\ell(uv) = \pi(v) - \pi(u)$.

Exercice 208 Dans un réseau (G, ℓ) , soient π un potentiel et uv un arc π -serré. Montrer que uv est un plus court (u, v) -chemin.

Solution Soit P un plus court (u, v) -chemin de G . Puisque uv est π -serré, par l'Exercice 203, on a $\ell(uv) = \pi(v) - \pi(u) \leq \ell(P)$. L'arc uv étant lui-même un (u, v) -chemin, on en conclut que $\ell(uv) = \ell(P)$, et la propriété voulue est bien démontrée. \square

Exercice 209 Dans un réseau (G, ℓ) , soient π un potentiel et P un (s, p) -chemin tel que chaque arc de P est π -serré. Montrer que P est un (s, p) -chemin de ℓ -longueur minimum.

Solution On pose $P = v_1 v_2 \dots v_k$ où $v_1 = s$ et $v_k = p$. Puisque chaque arc de P est π -serré on a $\ell(v_i v_{i+1}) = \pi(v_{i+1}) - \pi(v_i)$ pour tout $1 \leq i \leq k-1$. Alors, puisque les termes de la somme des différences de potentiel s'annulent deux-à-deux à l'exception de $\pi(s)$ et $\pi(p)$, on a

$$\ell(P) = \sum_{i=1}^{k-1} \ell(v_i v_{i+1}) = \sum_{i=1}^{k-1} (\pi(v_{i+1}) - \pi(v_i)) = \pi(v_k) - \pi(v_1) = \pi(p) - \pi(s),$$

donc, par la Remarque 92, P est un (s, p) -chemin de ℓ -longueur minimum. \square

Exercice 210 Dans un réseau (G, ℓ) sans circuit absorbant, soient s une racine et p un sommet quelconque de G , P un plus court (s, p) -chemin et π le potentiel égal à la fonction de distance depuis s (voir Remarque 91). Montrer que chaque arc de P est π -serré.

Solution On pose $P = v_1 v_2 \dots v_k$ où $v_1 = s$ et $v_k = p$. Considérons un arc $v_i v_{i+1}$ de P . Par la définition de π et l'Exercice 198, on a

$$\pi(v_{i+1}) - \pi(v_i) = \mathfrak{d}_{(G, \ell)}(s, v_{i+1}) - \mathfrak{d}_{(G, \ell)}(s, v_i) = \ell(P[s, v_{i+1}]) - \ell(P[s, v_i]) = \ell(v_i v_{i+1}),$$

et ainsi l'arc $v_i v_{i+1}$ de P est π -serré. \square

Exercice 211 Soient $(G = (V, A), \ell)$ un réseau sans circuit absorbant et s une racine de G . Montrer qu'il existe une s -arborescence de plus courts chemins de (G, ℓ) qui contient tous les sommets de G .

Solution Pour tout $v \in V$, soit $\pi(v)$ la ℓ -longueur d'un plus court (s, v) -chemin P_v dans (G, ℓ) . Par les hypothèses et la Remarque 91, π est un potentiel de (G, ℓ) . On pose $G' := (V, \bigcup_{v \in V} A(P_v))$. D'après l'Exercice 210, tous les arcs de P_v sont π -serrés et ainsi tous les arcs de G' aussi. Puisque le chemin P_v est dans G' pour tout $v \in V$, s est une racine de G' . Par l'Exercice 151, G' possède une s -arborescence couvrante, qui est aussi une s -arborescence couvrante de G . Pour tout $v \in V$, tous les arcs de l'unique (s, v) -chemin dans cette arborescence sont π -serrés donc, d'après l'Exercice 209, ce chemin est de ℓ -longueur minimum dans (G, ℓ) . \square

2.11.3 Application des potentiels

Etant donné un réseau (G, ℓ) et un sous-ensemble A' d'arcs de G , on appelle **opposé de (G, ℓ) sur A'** , le réseau obtenu à partir de (G, ℓ) en remplaçant chaque arc uv de A' par un arc vu de longueur égale à $-\ell(uv)$ (créant ainsi éventuellement deux arcs parallèles), les arcs qui ne sont pas dans A' conservant leur longueur.

Exercice 212 Soit (G, ℓ) un réseau qui possède un potentiel π et A' un ensemble d'arcs π -serrés dans (G, ℓ) . Montrer que l'opposé de (G, ℓ) sur A' est sans circuit absorbant.

Solution On note (G', ℓ') l'opposé de (G, ℓ) sur A' . Soit a un arc de G' . Si $a \in A(G) \setminus A'$ alors sa longueur n'a pas changé et (2.24) est toujours vérifié pour l'arc a dans (G', ℓ') . Sinon, $a = vu$ a remplacé l'arc $uv \in A'$ qui est π -serré dans (G, ℓ) , d'où, par la définition de ℓ' , on a

$$\ell'(vu) = -\ell(uv) = -(\pi(v) - \pi(u)) = \pi(u) - \pi(v).$$

Dans ce cas aussi l'arc a satisfait (2.24) par rapport à ℓ' , π est donc un potentiel de (G', ℓ') . En conséquence, par l'Exercice 205, (G', ℓ') est sans circuit absorbant. \square

Exercice 213 Soient (G, ℓ) un réseau sans circuit absorbant et C un circuit dans G de ℓ -longueur nulle. Montrer que l'opposé de (G, ℓ) sur $A(C)$ est un réseau sans circuit absorbant.

Solution Puisque (G, ℓ) est un réseau sans circuit absorbant, par l'Exercice 205, il existe un potentiel π de (G, ℓ) . On pose $C = v_1 v_2 \dots v_k$, où $v_k = v_1$ et on montre que chaque arc de C est π -serré. En effet, puisque π est un potentiel, par (2.24), on a pour tout $1 \leq i \leq k-1$, $\pi(v_{i+1}) - \pi(v_i) \leq \ell(v_i v_{i+1})$, et C étant supposé de ℓ -longueur nulle, on a ainsi,

$$0 = \ell(C) = \sum_{i=1}^{k-1} \ell(v_i v_{i+1}) \geq \sum_{i=1}^{k-1} (\pi(v_{i+1}) - \pi(v_i)) = 0.$$

On a donc égalité partout, et chaque arc $v_i v_{i+1}$ de C est π -serré dans (G, ℓ) . Par l'Exercice 212 appliqué à $A(C)$, on obtient que l'opposé de (G, ℓ) sur $A(C)$ est sans circuit absorbant. \square

Exercice 214 Soient (G, ℓ) un réseau sans circuit absorbant, s une racine de G , p un sommet quelconque de G et P un (s, p) -chemin de ℓ -longueur minimum dans G . Montrer que l'opposé de (G, ℓ) sur $A(P)$ est un réseau sans circuit absorbant.

Solution Soit π le potentiel égal à la fonction de distance depuis s dans (G, ℓ) (voir Remarque 91). Par l'Exercice 210, tous les arcs de P sont π -serrés dans G . En conséquence, par l'Exercice 212 appliqué à $A(P)$, on obtient que l'opposé de (G, ℓ) sur $A(P)$ est sans circuit absorbant. \square

Exercice 215 Soient (G, ℓ) un réseau sans circuit absorbant et s une racine de G . Montrer qu'il existe une s -arborescence couvrante F de G telle que l'opposé de (G, ℓ) sur $A(F)$ est un réseau sans circuit absorbant.

Solution Soit π le potentiel égal à la fonction de distance depuis s (voir Remarque 91). Par l'Exercice 211, il existe une s -arborescence couvrante F telle que pour tout $v \in V$, l'unique (s, v) -chemin dans F est un (s, v) -chemin de ℓ -longueur minimum dans (G, ℓ) . Donc, par l'Exercice 210, chaque arc de F est π -serré. En conséquence, par l'Exercice 212 appliqué à $A(F)$, on obtient que l'opposé de (G, ℓ) sur $A(F)$ est sans circuit absorbant. \square

2.11.4 Algorithmes

Remarque 95 Par la Remarque 83, un réseau $(G, \mathbb{1})$ n'a pas de circuit absorbant. L'Exercice 216 montre que l'algorithme de Recherche en Largeur d'Abord (FIG. 2.33) permet de trouver une s -arborescence de plus courts chemins de $(G, \mathbb{1})$.

Exercice 216 Soient $G = (V, A)$ un graphe orienté, s un sommet de G , S l'ensemble des sommets atteignables depuis s dans G . En exécutant l'algorithme de Recherche en Largeur d'Abord (FIG. 2.33) sur G et s , on obtient une numérotation $u_1, \dots, u_{|S|}$ des sommets de S et une s -arborescence $H = (S, F)$.

(a) Montrer que si $1 \leq x \leq y \leq |S|$ alors $d_{(H, \mathbb{1})}(s, u_x) \leq d_{(G, \mathbb{1})}(s, u_y)$.

(b) En déduire que H est une s -arborescence de plus courts chemins du réseau $(G, \mathbb{1})$.

Solution (a) Supposons par l'absurde qu'il existe au moins un couple d'indices qui vérifie l'hypothèse mais pas la conclusion de (a). Parmi ceux-ci on choisit (x, y) qui minimise $d_{(G, \mathbb{1})}(s, u_y)$. On a

$$x \leq y, \tag{2.28}$$

$$d_{(G, \mathbb{1})}(s, u_y) < d_{(H, \mathbb{1})}(s, u_x). \tag{2.29}$$

Puisque $d_{(H, \mathbb{1})}(s, u_x) = 0$ si et seulement si $u_x = s (= u_1)$, et puisque $0 \leq d_{(G, \mathbb{1})}(s, u_y)$, on en déduit que $u_x \neq s$ et, par (2.28), que $u_y \neq s$. Par conséquent, u_x a été numéroté lors de l'exploration d'un sommet u_z et l'arc $u_z u_x$ a été mis dans A_x et ainsi dans F . On remarque que

$$d_{(H, \mathbb{1})}(s, u_x) = d_{(H, \mathbb{1})}(s, u_z) + 1. \tag{2.30}$$

Soit P un plus court chemin de s à u_y dans $(G, \mathbb{1})$. Par définition de S , on a $V(P) \subseteq S$, et alors, par $u_y \neq s$, P possède un arc $u_w u_y$. Par l'Exercice 198,

$$d_{(G, \mathbb{1})}(s, u_w) = d_{(G, \mathbb{1})}(s, u_y) - 1. \tag{2.31}$$

Supposons que $w < z$. Alors l'exploration du sommet u_w a lieu avant celle du sommet u_z . Donc chaque voisin sortant de u_w a un numéro plus petit que celui de n'importe quel sommet numéroté lors de l'exploration de u_z , en particulier $y < x$. Or, par (2.28), $x \leq y$, on aboutit à une contradiction. On a donc $z \leq w$.

Alors, par (2.31) et le choix de y, z et w vérifiant la conclusion de (a), on a donc

$$d_{(H, \mathbb{1})}(s, u_z) \leq d_{(G, \mathbb{1})}(s, u_w). \tag{2.32}$$

En ajoutant les inégalités (2.29), (2.30), (2.31) et (2.32), on aboutit à une inégalité stricte dont les deux membres sont égaux, ce qui est une contradiction.

(b) Pour tout $u_x \in S$, puisque H est un sous-graphe de G , on a $d_{(H, \mathbb{1})}(s, u_x) \geq d_{(G, \mathbb{1})}(s, u_x)$, et par (a), on a $d_{(H, \mathbb{1})}(s, u_x) \leq d_{(G, \mathbb{1})}(s, u_x)$. Par conséquent, les distances depuis s vers un sommet quelconque de S sont les mêmes dans $(G, \mathbb{1})$ et dans $(H, \mathbb{1})$. \square

ALGORITHME DISTANCES DANS UNE ARBORESCENCE :

ENTRÉE : Un réseau $(G = (V, A), \ell)$ tel que G est une s -arborescence.

SORTIE : Une fonction $\pi : V \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\pi(v) = d_{(G, \ell)}(s, v)$ pour tout sommet v de G .

Étape 0 : *Initialisation.*
 $S_1 := \{s\}, i := 1, \pi(s) := 0.$

Étape 1 : *Marquage et calcul de la distance.*
 Tant qu'il existe un arc uv de G tel que $u \in S_i, v \notin S_i$ faire :
 $S_{i+1} := S_i \cup \{v\},$
 $\pi(v) := \pi(u) + \ell(uv),$
 $i := i + 1.$

Étape 2 : *Fin de l'algorithme.*
 STOP.

FIGURE 2.77 – Algorithme Distances dans une arborescence.

Exercice 217 (Justification de l'algorithme Distances dans une arborescence (FIG. 2.77)) Montrer que $\pi(v) = d_{(G, \ell)}(s, v)$ pour tout sommet v de G .

Solution Puisque G est une s -arborescence, s est une racine de G et ainsi, par l'Exercice 129, tout sommet v de G appartient à S_i pour un certain i compris entre 1 et $|V|$ et $\pi(v)$ est calculé. Il suffit donc de montrer par récurrence sur i que $\pi(v) = d_{(G, \ell)}(s, v)$ pour tout $v \in S_i$. Pour $i = 1$, $S_1 = \{s\}$ et $\pi(s) = 0 = d_{(G, \ell)}(s, s)$ car G est une arborescence et donc sans circuit. Supposons maintenant que la propriété est vraie pour un certain indice i compris entre 1 et

$|V| - 1$. Par l'hypothèse de récurrence, on doit seulement montrer que $\pi(v) = \mathfrak{d}_{(G,\ell)}(s, v)$ pour le seul sommet $v \in S_{i+1} \setminus S_i$. Par définition de l'algorithme, il existe un arc uv dans G tel que $u \in S_i$ et $\pi(v) = \pi(u) + \ell(uv)$. En conséquence, par les Exercices 202 et 152(c) et l'hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}_{(G,\ell)}(s, v) &= \min\{\mathfrak{d}_{(G,\ell)}(s, w) + \ell(wv) : wv \in A\} \\ &= \mathfrak{d}_{(G,\ell)}(s, u) + \ell(uv) \\ &= \pi(u) + \ell(uv) \\ &= \pi(v). \end{aligned}$$

□

Remarque 96 *Étant donné un réseau $(G, \mathbb{1})$ pour lequel on veut calculer les distances depuis un sommet s , on peut trouver une s -arborescence de plus courts chemins de $(G, \mathbb{1})$ par la Remarque 95 et ensuite déterminer les distances depuis s dans cette arborescence par l'algorithme Distances dans une arborescence (FIG. 2.77).*

Algorithme de Bellman

Dans cette sous-section nous allons considérer un cas particulier de réseaux sans circuit absorbant : les réseaux sans circuit.

<p>ALGORITHME DE BELLMAN :</p> <p>ENTRÉE : Un réseau $(G = (V, A), \ell)$ sans circuit et une racine s de G.</p> <p>SORTIE : Une fonction $\pi : V \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\pi(v) = \mathfrak{d}_{(G,\ell)}(s, v)$ pour tout sommet v de G et une s-arborescence H de plus courts chemins du réseau (G, ℓ).</p> <p>Étape 0 : <i>Initialisation.</i> $\pi(s) := 0, F_1 := \emptyset, G_1 := G, v_1 := s, i := 1, n := V .$</p> <p>Étape 1 : <i>Graphe courant.</i> $G_{i+1} := G_i - v_i.$</p> <p>Étape 2 : <i>Choix du sommet.</i> Choisir dans G_{i+1} un sommet v_{i+1} sans arc entrant.</p> <p>Étape 3 : <i>Calcul de la distance.</i> $\pi(v_{i+1}) := \min\{\pi(v_j) + \ell(v_j v_{i+1}) : j \leq i, v_j v_{i+1} \in A\},$ choisir un arc a_{i+1} qui réalise ce minimum.</p> <p>Étape 4 : <i>Construction de l'arborescence.</i> $F_{i+1} := F_i \cup \{a_{i+1}\}.$</p> <p>Étape 5 : <i>Test d'arrêt.</i> $i := i + 1.$ Si $i < n$ alors aller à l'Étape 1, sinon $H := (V, F_n),$ STOP.</p>
--

FIGURE 2.78 – Algorithme de Bellman.

Exercice 218 *Exécuter l'algorithme de Bellman (FIG.2.78) sur le réseau sans circuit et de racine s de la FIG.2.79.*

Solution Le déroulement de l'algorithme de Bellman sur le réseau (G, ℓ) de la FIG.2.79 est représenté sur la FIG.2.80. Sur chaque copie de G on a représenté les sommets v pour lesquels

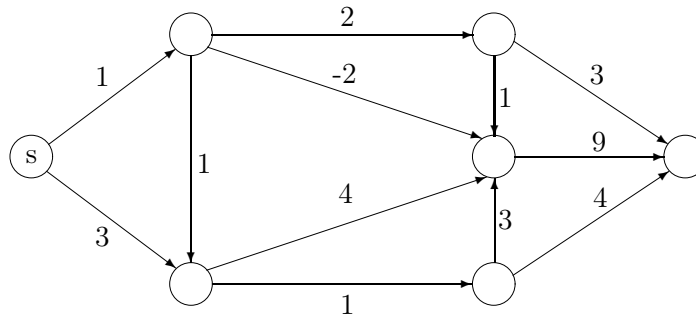


FIGURE 2.79 – Un réseau (G, ℓ) sans circuit et une racine s de G .

$\pi(v)$ a été calculé ainsi que la valeur de $\pi(v)$, les arcs déjà placés dans l'arborescence et pour le dernier sommet choisi la manière dont son π a été calculé. □

Exercice 219 (Justification de l'algorithme de Bellman (FIG. 2.78))

Montrer que

- (a) pour chaque i entre 1 et $n - 1$, il existe dans G_{i+1} un sommet v_{i+1} sans arc entrant,
- (b) si $v_j v_{i+1} \in A$ alors $j \leq i$,
- (c) pour chaque i entre 1 et $n - 1$, il existe dans G un arc entrant de v_{i+1} ,
- (d) l'algorithme se termine,
- (e) pour chaque i entre 1 et n , $\pi(v_i) = d_{(G,\ell)}(s, v_i)$,
- (f) H est une s -arborescence de plus courts chemins du réseau (G, ℓ) .

Solution On notera V_i l'ensemble $\{v_1, \dots, v_i\}$.

(a) Supposons par l'absurde que dans G_{i+1} tout sommet v a au moins un arc entrant. Alors, d'après l'Exercice 132(b), G_{i+1} , et donc G aussi, possède un circuit, ce qui contredit l'hypothèse que G est sans circuit.

(b) Par le choix de v_{i+1} à l'Étape 2, dans $G_{i+1} = G - V_i$, le sommet v_{i+1} n'a pas d'arc entrant. Par conséquent, s'il existe dans G un arc $v_j v_{i+1}$ alors $v_j \in V_i$ et ainsi $j \leq i$.

(c) Puisque $s = v_1$ est une racine de G et v_{i+1} est un sommet de G , il existe un chemin P de s à v_{i+1} dans G . Comme $1 < i + 1$, P contient au moins un arc et le dernier de ceux-ci est un arc entrant de v_{i+1} .

(d) L'algorithme va répéter $n - 1$ fois la boucle constituée des Étapes de 1 à 5. Par (a) et respectivement (b) et (c), le choix d'un sommet à l'Étape 2, respectivement d'un arc à l'Étape 3, est bien réalisable. Chaque opération de l'algorithme prend un temps fini et il y en a un nombre fini, donc l'algorithme se termine.

(e) On va montrer (e) par récurrence sur i . Pour $i = 1$, on a $\pi(v_1) = \pi(s) = 0$ qui est bien la ℓ -longueur minimum d'un (s, s) -chemin dans (G, ℓ) . Supposons maintenant que (e) est vérifié jusqu'à i entre 1 et $n - 1$. Considérons le sommet v_{i+1} . Par l'Exercice 202,

$$d_{(G,\ell)}(s, v_{i+1}) = \min\{d_{(G,\ell)}(s, v_j) + \ell(v_j v_{i+1}) : v_j v_{i+1} \in A\}.$$

Par (b), si $v_j v_{i+1} \in A$ alors $j \leq i$. Donc pour $v_j v_{i+1} \in A$, en vertu de l'hypothèse de récurrence, $\pi(v_j) = d_{(G,\ell)}(s, v_j)$. En conséquence,

$$d_{(G,\ell)}(s, v_{i+1}) = \min\{\pi(v_j) + \ell(v_j v_{i+1}) : j \leq i, v_j v_{i+1} \in A\}$$

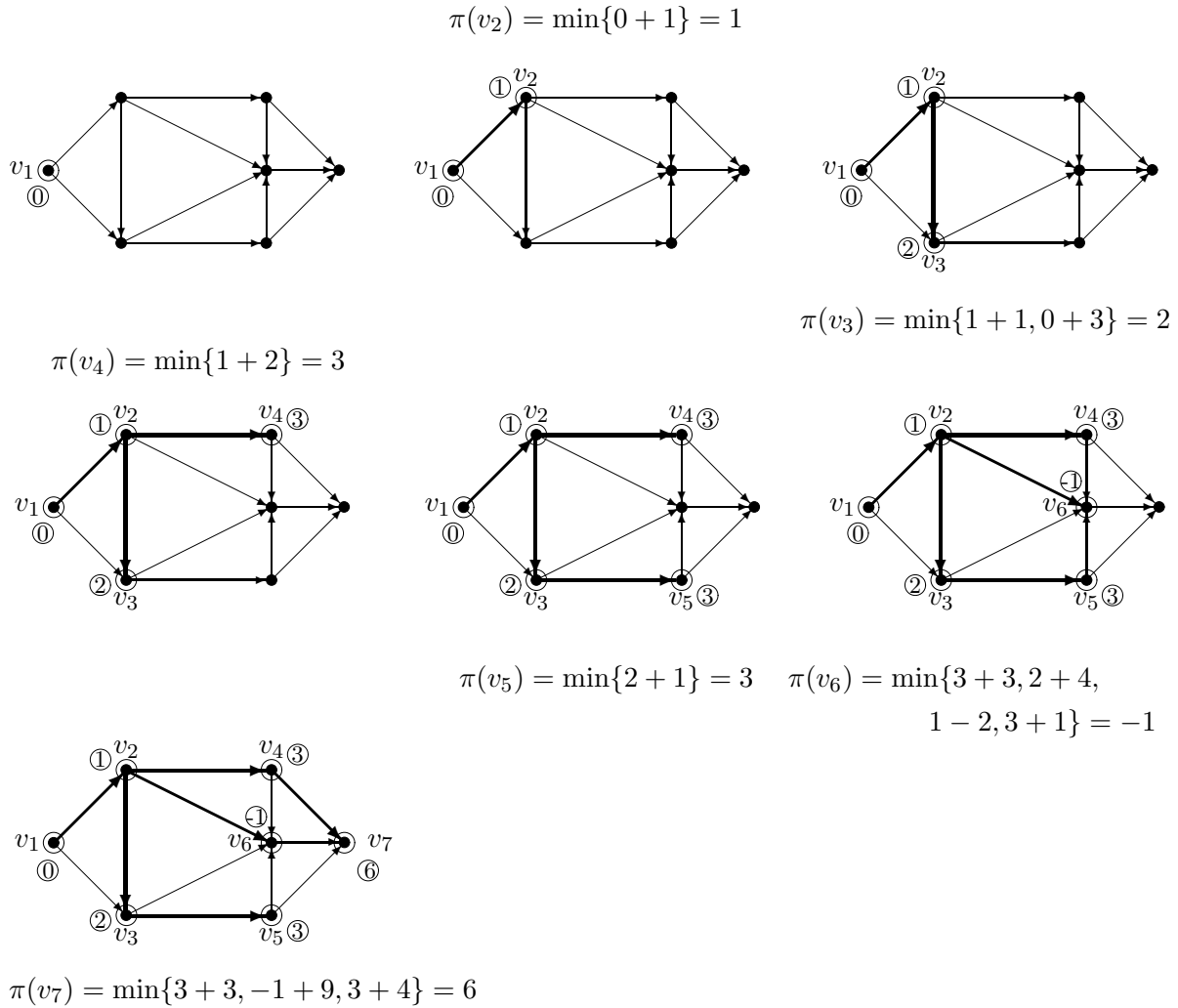


FIGURE 2.80 – Déroulement de l'algorithme de Bellman sur le réseau de la FIG. 2.79.

qui est égal à la valeur de $\pi(v_{i+1})$ calculée à l'Étape 3. Donc (e) est bien vérifié pour $i + 1$.

(f) On va montrer par récurrence sur i entre 1 et n que $H_i := (V_i, F_i)$ est une s -arborescence telle que, pour tout $v \in V_i$,

$$d_{(H_i, \ell)}(s, v) = \pi(v). \tag{2.33}$$

Pour $i = 1$, on a $V_1 = \{v_1\} = \{s\}$ et $F_1 = \emptyset$, donc H_1 est bien une s -arborescence et $d_{(H_1, \ell)}(s, s) = 0 = \pi(s)$. Supposons que la propriété voulue est vérifiée pour un i entre 1 et $n - 1$. Par définition, $F_{i+1} = F_i \cup \{a_{i+1}\}$ où $a_{i+1} = v_k v_{i+1}$ pour un $k \leq i$ tel que

$$\pi(v_k) + \ell(v_k v_{i+1}) = \pi(v_{i+1}). \tag{2.34}$$

D'après l'Exercice 142, H_{i+1} est une s -arborescence. Par construction, a_{i+1} est le seul arc entrant de v_{i+1} dans H_{i+1} . Ceci implique, par (2.23) de l'Exercice 202, que

$$d_{(H_{i+1}, \ell)}(s, v_{i+1}) = d_{(H_{i+1}, \ell)}(s, v_k) + \ell(v_k v_{i+1}). \tag{2.35}$$

Puisque H_i est une sous- s -arborescence de H_{i+1} et en vertu de l'hypothèse de récurrence, on obtient que tout $v \in V_{i+1} \setminus \{v_{i+1}\}$ vérifie

$$d_{(H_{i+1}, \ell)}(s, v) = d_{(H_i, \ell)}(s, v) = \pi(v). \tag{2.36}$$

Finalement, par (2.34), (2.35) et (2.36) appliquée à v_k on obtient que $d_{(H_{i+1}, \ell)}(s, v_{i+1}) = \pi(v_{i+1})$. Ainsi la propriété voulue est bien vérifiée pour $i + 1$.

Alors, par $H = H_n$ et (e), on a $d_{(H, \ell)}(s, v) = \pi(v) = d_{(G, \ell)}(s, v)$ pour tout $v \in V$, on obtient que H est bien une s -arborescence de plus courts chemins du réseau (G, ℓ) . \square

Remarque 97 *Nous remarquons que dans un réseau sans circuit (G, ℓ) on peut aussi résoudre le problème des plus longs chemins en appliquant l'algorithme de Bellman (FIG.2.78) au réseau $(G, -\ell)$. De manière équivalente, en remplaçant min par max à l'Étape 3 de l'algorithme de Bellman (FIG.2.78), on obtient un algorithme pour résoudre le problème des plus longs chemins dans un réseau sans circuit.*

Algorithme de Dijkstra

Dans cette sous-section nous allons considérer un autre cas particulier de réseaux sans circuit absorbant : les réseaux dont les arcs ont tous une longueur positive ou nulle.

Exercice 220 *Soit $(G = (V, A), \ell)$ un réseau dont toutes les longueurs sont positives ou nulles, s un sommet de G et S un sous-ensemble de sommets de G atteignables depuis s et qui contient s . A chaque sommet $u \in V \setminus S$ on associe*

$$\eta_S(u) = \min\{d_{(G, \ell)}(s, s') + \ell(s'u) : s'u \in \delta^+(S)\}. \quad (2.37)$$

Montrer que :

- (a) *pour tout sommet $w \in N^+(S)$, il existe dans G un (s, w) -chemin de ℓ -longueur $\eta_S(w)$,*
- (b) *pour tout sommet $u \in V \setminus S$ tel que $\eta_S(u) = \min\{\eta_S(x) : x \in V \setminus S\}$, on a*

$$\eta_S(u) = d_{(G, \ell)}(s, u). \quad (2.38)$$

Solution (a) Soit $w \in N^+(S)$. Par définition $\eta_S(w) = d_{(G, \ell)}(s, s') + \ell(s'w)$ pour un arc $s'w \in \delta^+(S)$. Il existe donc dans G un chemin P de s à s' de ℓ -longueur $d_{(G, \ell)}(s, s')$, en rajoutant l'arc $s'w$ à P on obtient un chemin de s à w de ℓ -longueur $\eta_S(w)$.

(b) Puisque les longueurs sont positives ou nulles, (G, ℓ) est sans circuit absorbant. Par la Remarque 89, $d_{(G, \ell)}(s, w) \neq \infty$ pour tout sommet w de G atteignable depuis s et alors, par définition de S et de η_S , et puisque les longueurs des arcs sont, par définition, finies, on a

$$\eta_S(w) \neq \infty \text{ pour tout } w \in N^+(S). \quad (2.39)$$

Soient $m = \min\{\eta_S(x) : x \in V \setminus S\}$ et u un sommet de $V \setminus S$ tel que $\eta_S(u) = m$.

Si $m = \infty$, alors, par (2.39), $N^+(S) = \emptyset$, ainsi $\delta^+(S) = \emptyset$ et donc, par l'Exercice 129, puisque $s \in S$, on sait que u n'est pas atteignable depuis s et par conséquent, par définition de la distance, on a $d_{(G, \ell)}(s, u) = \infty = m = \eta_S(u)$ et (2.38) est bien démontrée dans ce cas.

Supposons maintenant que $m \neq \infty$. Par (2.37), on a alors $u \in N^+(S)$ et donc, par (a), u est atteignable depuis s , et ainsi, par l'Exercice 197(b), il existe un (s, u) -chemin P de ℓ -longueur minimum. Puisque $s \in S$ et $u \notin S$, il existe, par la Remarque 54, un arc $s'y$ de P tel que $s' \in S$ et $y \notin S$. On a alors, par l'Exercice 198 appliqué au sous-chemin $P[s, s']$,

$$\ell(P) = d_{(G, \ell)}(s, s') + \ell(s'y) + \ell(P[y, u]).$$

Par (2.37) et définition de m , on a $d_{(G,\ell)}(s, s') + \ell(s'y) \geq \eta_S(y) \geq m$, et, puisque les longueurs sont positives, on a aussi $\ell(P[y, u]) \geq 0$ d'où l'on peut conclure que

$$\ell(P) \geq m.$$

Par définition de u , par (a) et la définition de P , on en déduit alors que

$$m = \eta_S(u) \geq d_{(G,\ell)}(s, u) = \ell(P) \geq m,$$

on a donc égalité partout et (2.38) est bien démontrée. \square

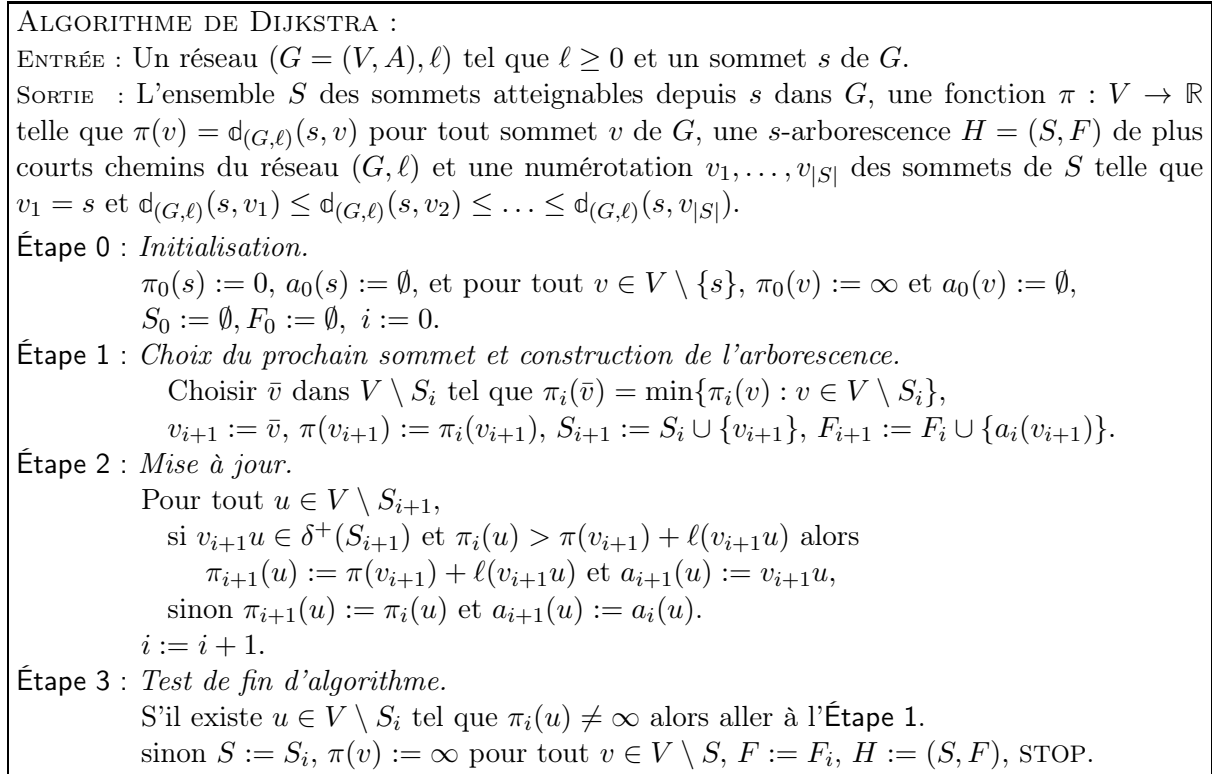


FIGURE 2.81 – Algorithme de Dijkstra.

Exercice 221 Exécuter l'algorithme de Dijkstra (FIG.2.81) sur le réseau et le sommet s de la FIG.2.82.

Solution Le déroulement de l'algorithme de Dijkstra sur le réseau (G, ℓ) de la FIG.2.82 est représenté sur la FIG.2.83. Sur chaque copie de G , les sommets encadrés sont ceux qui sont dans l'ensemble S_i courant et leur valeur est celle de π ; pour les autres sommets la valeur indiquée est celle de π_i . Les arcs en gras sont ceux de F_i . La copie de G en haut à gauche dans la figure représente l'initialisation, et chacune des autres copies correspond à la situation après une itération supplémentaire des Étapes 1 et 2. Sur la dernière copie de G on voit bien l'arborescence de plus courts chemins et les valeurs des distances depuis s . \square

Exercice 222 (Justification de l'algorithme de Dijkstra (FIG. 2.81))

Montrer que

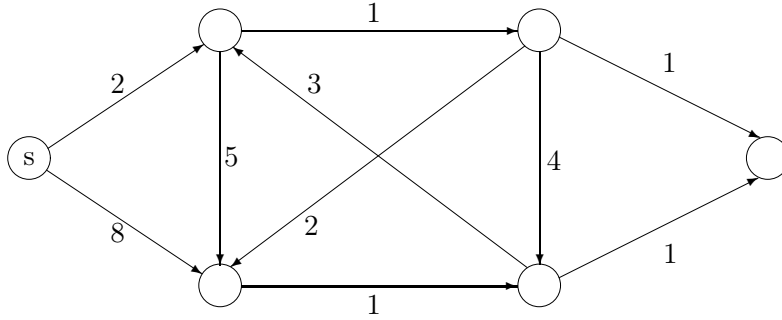


FIGURE 2.82 – Un réseau (G, ℓ) tel que $\ell \geq 0$ et un sommet s de G .

- (a) l'algorithme se termine,
- (b) $v_1 = s$, et pour tout $1 \leq i \leq |S|$, on a $S_i = \{v_1, \dots, v_i\}$,
- (c) pour tout $0 \leq i \leq |S|$ et pour tout $u \in V \setminus (S_i \cup \{s\})$,

$$\pi_i(u) = \min\{\pi(s') + \ell(s'u) : s'u \in \delta^+(S_i)\}, \tag{2.40}$$

- (d) pour tout $v \in S$, $\pi(v) = d_{(G, \ell)}(s, v) < \infty$,
- (e) pour tout $v \in V \setminus S$, $\pi(v) = d_{(G, \ell)}(s, v) = \infty$,
- (f) S est égal à l'ensemble des sommets atteignables depuis s dans G et la numérotation des sommets de S vérifie :

$$d_{(G, \ell)}(s, v_1) \leq d_{(G, \ell)}(s, v_2) \leq \dots \leq d_{(G, \ell)}(s, v_{|S|}),$$

- (g) H est une s -arborescence de plus courts chemins du réseau (G, ℓ) et $a_{i-1}(v_i)$ est l'arc entrant de v_i dans H pour tout sommet $v_i \in S \setminus \{s\}$.

Solution (a) A chaque itération de la boucle constituée des Étapes 1, 2, 3, l'algorithme choisit un nouveau sommet. Par conséquent, l'algorithme va répéter cette boucle au plus $|V|$ fois. Puisque chaque étape de l'algorithme prend un temps fini et que le nombre d'étapes exécutées est fini ($\leq 3|V| + 1$), l'algorithme se termine.

(b) Par l'initialisation, toutes les valeurs de π_0 sont ∞ à l'exception de celle de s qui vaut 0. A la première itération de l'Étape 1 l'algorithme choisit donc le sommet s et pose $S_1 = \{v_1\} = \{s\}$. Par construction, S_i est obtenu en rajoutant v_i à S_{i-1} , d'où $S_i = \{v_1, \dots, v_i\}$ pour tout $1 \leq i \leq |S|$.

(c) On va raisonner par récurrence sur i . Pour $i = 0$, par l'initialisation, $S_0 = \emptyset$ et ainsi $\delta^+(S_0) = \emptyset$, et alors pour tout $u \in V \setminus \{s\}$, on a $\min\{\pi(s') + \ell(s'u) : s'u \in \delta^+(S_0)\} = \infty = \pi_0(u)$ donc (2.40) est bien vérifiée.

Supposons maintenant que (c) est bien vérifié pour un i compris entre 0 et $|S| - 1$. Par (b), s appartient à S_{i+1} et donc $V \setminus S_{i+1} = V \setminus (S_{i+1} \cup \{s\}) \subseteq V \setminus (S_i \cup \{s\})$. Pour tout $u \in V \setminus S_{i+1}$, s'il n'y a pas un arc $v_{i+1}u$ de G tel que $\pi_i(u) > \pi(v_{i+1}) + \ell(v_{i+1}u)$, alors, par la mise à jour à l'Étape 2, par l'hypothèse de récurrence et l'hypothèse sur u , on a

$$\begin{aligned} \pi_{i+1}(u) &= \pi_i(u) \\ &= \min\{\pi(s') + \ell(s'u) : s'u \in \delta^+(S_i)\} \\ &= \min\{\pi(s') + \ell(s'u) : s'u \in \delta^+(S_{i+1})\}. \end{aligned}$$

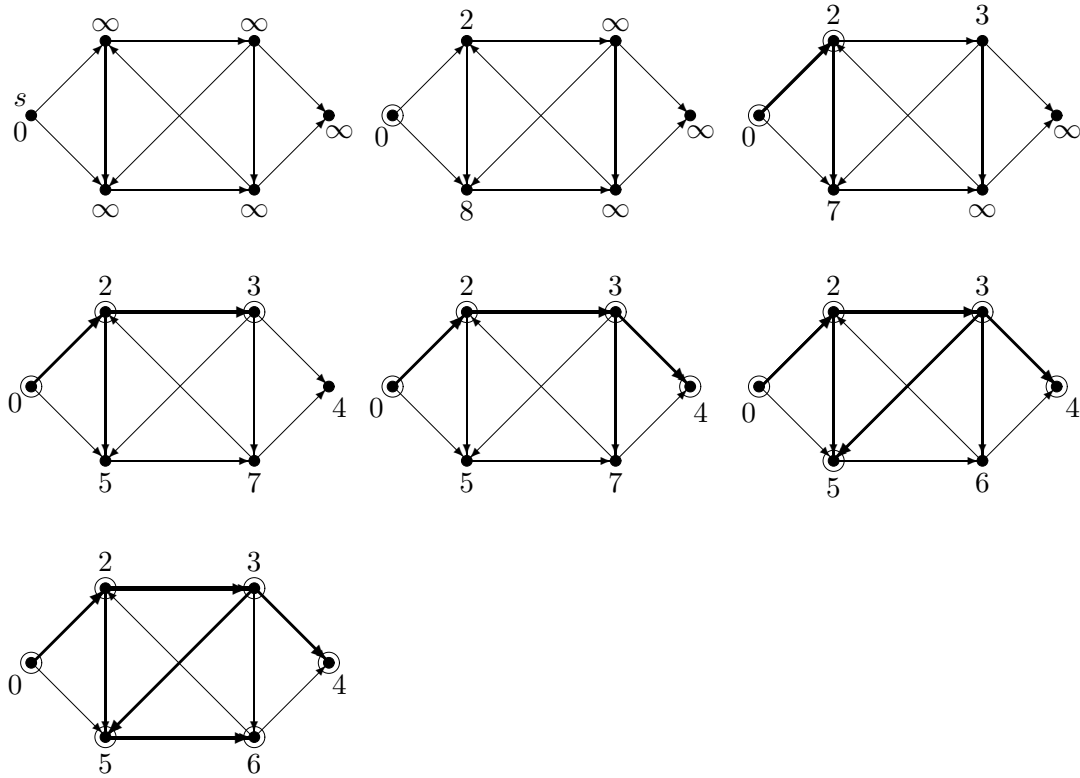


FIGURE 2.83 – Déroulement de l'algorithme de Dijkstra sur le réseau de la FIG.2.82.

Par ailleurs, pour tout $u \in V \setminus S_{i+1}$ tel que $v_{i+1}u \in \delta^+(S_{i+1})$ et $\pi_i(u) > \pi(v_{i+1}) + \ell(v_{i+1}u)$, par la mise à jour à l'Étape 2, par l'hypothèse sur u et l'hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned} \pi_{i+1}(u) &= \pi(v_{i+1}) + \ell(v_{i+1}u) \\ &= \min\{\pi(v_{i+1}) + \ell(v_{i+1}u), \pi_i(u)\} \\ &= \min\{\pi(v_{i+1}) + \ell(v_{i+1}u), \min\{\pi(s') + \ell(s'u) : s'u \in \delta^+(S_i)\}\} \\ &= \min\{\pi(s') + \ell(s'u) : s'u \in \delta^+(S_{i+1})\}. \end{aligned}$$

Ainsi (c) est bien démontré pour $i + 1$ et donc, par récurrence, pour tout $0 \leq i \leq |S|$.

(d) Par (b), $S = \{v_1, \dots, v_{|S|}\}$. On va montrer que $\pi(v_k) = d_{(G,\ell)}(s, v_k) < \infty$ par récurrence sur k compris entre 1 et $|S|$. Pour $k = 1$, par (b), $v_1 = s$ et, par l'initialisation, $\pi(v_1) = \pi_0(v_1) = 0 = d_{(G,\ell)}(s, v_1)$ car, puisque $\ell \geq 0$, il n'y a pas dans (G, ℓ) de (s, v_1) -chemin plus court que celui sans arc. Ainsi (d) est bien démontré pour $k = 1$.

Soit maintenant k compris entre 1 et $|S| - 1$ et supposons que la propriété est vraie jusqu'à k , c'est-à-dire que $\pi(v_j) = d_{(G,\ell)}(s, v_j) < \infty$ pour tout $1 \leq j \leq k$. Alors, par (b), dans (G, ℓ) tout sommet s' de S_k est atteignable depuis s et $\pi(s')$ est égal à la ℓ -longueur d'un plus court (s, s') -chemin. En utilisant (c) et ce qui précède, pour tout $u \in V \setminus S_k$, on a

$$\begin{aligned} \pi_k(u) &= \min\{\pi(s') + \ell(s'u) : s'u \in \delta^+(S_k)\} \\ &= \min\{d_{(G,\ell)}(s, s') + \ell(s'u) : s'u \in \delta^+(S_k)\}. \end{aligned}$$

Ainsi la fonction π_k coïncide avec la fonction η_{S_k} de l'Exercice 220. Par l'Exercice 220(b), on a alors que le sommet $\bar{v} = v_{k+1}$ choisi à la $(k + 1)$ -ème itération de l'Étape 1 vérifie $\pi(v_{k+1}) =$

$\pi_k(v_{k+1}) = d_{(G,\ell)}(s, v_{k+1})$. De plus, par le k -ème test de fin d'algorithme, à la $(k+1)$ -ème itération de l'Étape 1, $\pi(v_{k+1}) = \pi_k(\bar{v}) < \infty$. Ainsi (d) est bien démontré pour $k+1$ et donc, par récurrence, pour tout $1 \leq k \leq |S|$.

(e) Soit $v \in V \setminus S$. Par le test de fin d'algorithme, on a $\pi_{|S|}(v) = \infty$ et donc $\pi_{|S|}(v) = \min\{\pi_{|S|}(x) : x \in V \setminus S\}$. D'après (b), (c) et (d), on a

$$\pi_{|S|}(v) = \min\{d_{(G,\ell)}(s, s') + \ell(s'v) : s'v \in \delta^+(S)\}$$

et tout $s' \in S$ est atteignable depuis s dans G . Ainsi $\pi_{|S|}$ coïncide avec η_S de l'Exercice 220. Par la définition de π à l'Étape 3 et par l'Exercice 220(b), on en conclut que $\pi(v) = \infty = \pi_{|S|}(v) = d_{(G,\ell)}(s, v)$.

(f) Par (b), (d) et (e), $S = \{v_1, \dots, v_{|S|}\}$ et c'est exactement l'ensemble des sommets atteignables depuis s dans G . Par (d) et la définition de π , il suffit de montrer que pour chaque $1 \leq i \leq |S| - 1$, on a $\pi_{i-1}(v_i) \leq \pi_i(v_{i+1})$. Par le choix de v_i , $\pi_{i-1}(v_i) \leq \pi_{i-1}(v_{i+1})$. Si $\pi_i(v_{i+1}) = \pi_{i-1}(v_{i+1})$, alors l'inégalité voulue est bien vérifiée. Sinon, par la mise à jour et la définition de π à l'Étape 1, $\pi_i(v_{i+1}) = \pi_{i-1}(v_i) + \ell(v_i v_{i+1})$, par $\ell \geq 0$, $\pi_{i-1}(v_i) \leq \pi_{i-1}(v_i) + \ell(v_i v_{i+1})$, et alors l'inégalité voulue est à nouveau vérifiée.

(g) On va montrer par récurrence sur k compris entre 1 et $|S|$ que le graphe $H_k := (S_k, F_k)$ est une s -arborescence telle que, pour tout $v \in S_k$, on a

$$d_{(H_k, \ell)}(s, v) = d_{(G, \ell)}(s, v). \quad (2.41)$$

Ceci est trivialement vérifié pour $k = 1$. En effet, par construction, $H_1 = (\{s\}, \emptyset)$ est une s -arborescence. De plus, par (b), (d) et l'initialisation, on a $d_{(H_1, \ell)}(s, s) = 0 = d_{(G, \ell)}(s, s)$.

On suppose maintenant que H_k est une s -arborescence telle que, pour tout $v \in S_k$, on a (2.41). Par définition, H_{k+1} est obtenu à partir de H_k en rajoutant le sommet v_{k+1} et l'arc $a_k(v_{k+1}) = v_j v_{k+1}$ pour un certain j compris entre 1 et k , tels que, par la définition de π à l'Étape 1 et la mise à jour, on a

$$\pi(v_{k+1}) = \pi_k(v_{k+1}) = \pi_j(v_{k+1}) = \pi(v_j) + \ell(v_j v_{k+1}). \quad (2.42)$$

Puisque H_k est une s -arborescence, par l'Exercice 142, H_{k+1} en est une aussi. De plus,

$$d_{(H_{k+1}, \ell)}(s, v) = d_{(H_k, \ell)}(s, v) \text{ pour tout } v \in S_k$$

et alors, par (2.41) et (b), pour tout $v \in S_{k+1} \setminus \{v_{k+1}\}$, on a

$$d_{(H_{k+1}, \ell)}(s, v) = d_{(G, \ell)}(s, v). \quad (2.43)$$

Il reste donc à considérer le sommet v_{k+1} . Par l'Exercice 198,

$$d_{(H_{k+1}, \ell)}(s, v_j) + \ell(v_j v_{k+1}) = d_{(H_{k+1}, \ell)}(s, v_{k+1}). \quad (2.44)$$

Par (d) appliqué à v_{k+1} , (2.42), (d) appliqué à v_j , (2.43) appliqué à v_j (puisque $v_j \in S_{k+1} \setminus \{v_{k+1}\}$) et (2.44), on obtient

$$\begin{aligned} d_{(G, \ell)}(s, v_{k+1}) &= \pi(v_{k+1}) \\ &= \pi(v_j) + \ell(v_j v_{k+1}) \\ &= d_{(G, \ell)}(s, v_j) + \ell(v_j v_{k+1}) \\ &= d_{(H_{k+1}, \ell)}(s, v_j) + \ell(v_j v_{k+1}) \\ &= d_{(H_{k+1}, \ell)}(s, v_{k+1}). \end{aligned}$$

On a donc montré que H_{k+1} a la propriété voulue.

Ainsi $H = H_{|S|}$ est bien une s -arborescence de plus courts chemins du réseau $(G[S], \ell)$ et ainsi, par (f), H est une s -arborescence de plus courts chemins du réseau (G, ℓ) . \square

Exercice 223 Donner un réseau sans circuit absorbant avec une racine s pour lequel l'algorithme de Dijkstra (FIG. 2.81) ne trouve pas les chemins de longueur minimum issus de s .

Solution Par l'Exercice 222, l'algorithme de Dijkstra calcule les plus courts chemins pour tous réseaux dont les longueurs sont positives. Le réseau recherché doit donc contenir au moins un arc de longueur négative. Soit par exemple (G, ℓ) le réseau de la FIG. 2.84. On vérifie facilement que (G, ℓ) est sans circuit, donc sans circuit absorbant. Pour le sommet b , l'algorithme de Dijkstra appliqué à ce réseau trouve le chemin sb de ℓ -longueur 1 alors que le chemin sab est de ℓ -longueur 0 donc plus court.

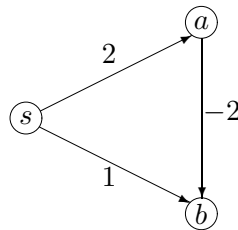


FIGURE 2.84 – Le réseau (G, ℓ) utilisé dans la solution de l'Exercice 223.

\square

Algorithme de Bellman-Ford

Exercice 224 Soient $(G = (V, A), \ell)$ un réseau ayant n sommets et s une racine de G . Pour tout entier i compris entre 0 et n et pour tout $v \in V$, on note $p_i(v)$ la ℓ -longueur minimum d'un (s, v) -chemin ayant au plus i arcs dans (G, ℓ) . Montrer que, pour tout $v \in V$ et tout $0 \leq i \leq n-1$, on a

- (a) $p_{i+1}(v) \leq p_i(v)$,
- (b) $p_{i+1}(v) \leq p_i(u) + \ell(uv)$ pour tout $uv \in A$,
- (c) $p_{i+1}(v) = \min\{p_i(v), \min\{p_i(u) + \ell(uv) : uv \in A\}\}$,
- (d) si $p_{i+1} = p_i$ alors $p_{i+k} = p_i$ pour tout $k \geq 1$,
- (e) si (G, ℓ) est sans circuit absorbant alors $p_n = p_{n-1} = \mathfrak{d}_{(G, \ell)}(s, \cdot)$,
- (f) si $p_n = p_{n-1}$ alors (G, ℓ) est sans circuit absorbant.

Solution Soit v un sommet quelconque de G . On note $\mathcal{P}_i(v)$ l'ensemble des (s, v) -chemins ayant au plus i arcs dans G . Par définition,

$$p_i(v) = \min\{\ell(P) : P \in \mathcal{P}_i(v)\}. \quad (2.45)$$

(a) Puisque $\mathcal{P}_i(v) \subseteq \mathcal{P}_{i+1}(v)$, par (2.45), on en déduit que $p_{i+1}(v) \leq p_i(v)$.

(b) Soit $uv \in A$. Si $\mathcal{P}_i(u) = \emptyset$, alors $p_i(u) = \infty$ et l'inégalité est bien vérifiée. Sinon, soit $P \in \mathcal{P}_i(u)$ tel que $p_i(u) = \ell(P)$. Alors $P + uv \in \mathcal{P}_{i+1}(v)$ donc

$$p_{i+1}(v) \leq \ell(P + uv) = \ell(P) + \ell(uv) = p_i(u) + \ell(uv).$$

(c) D'après (a) et (b), on a

$$p_{i+1}(v) \leq \min\{p_i(v), \min\{p_i(u) + \ell(uv) : uv \in A\}\}. \quad (2.46)$$

Il reste à montrer qu'on a aussi l'inégalité inverse :

$$p_{i+1}(v) \geq \min\{p_i(v), \min\{p_i(u) + \ell(uv) : uv \in A\}\}. \quad (2.47)$$

On distingue trois cas.

- Si $\mathcal{P}_{i+1}(v) = \emptyset$, alors $p_{i+1}(v) = \infty$ et ainsi (2.47) est vérifié.
- Sinon soit $P \in \mathcal{P}_{i+1}(v)$ tel que $\ell(P) = p_{i+1}(v)$.
 - Si $P \in \mathcal{P}_i(v)$ alors $p_{i+1}(v) = \ell(P) \geq p_i(v)$ et donc (2.47) est vérifié.
 - Sinon P contient exactement $i + 1$ (≥ 1) arcs. Soit uv le dernier arc de P et soit $P' := P[s, w]$. Alors P' est un (s, w) -chemin ayant i (≥ 0) arcs, donc $P' \in \mathcal{P}_i(w)$. D'après la définition de $p_i(w)$, on a

$$p_{i+1}(v) = \ell(P) = \ell(P') + \ell(uv) \geq p_i(w) + \ell(uv) \geq \min\{p_i(u) + \ell(uv) : uv \in A\}$$

et (2.47) est à nouveau vérifié.

(d) On va montrer (d) par récurrence sur k . Pour $k = 1$, la propriété est vérifiée par l'hypothèse sur p_i . Supposons maintenant que $p_{i+k} = p_i$. Par (c) appliqué à $i + k$, l'hypothèse de récurrence, (c) appliqué à i et l'hypothèse sur i , on a pour tout $v \in V$,

$$\begin{aligned} p_{i+k+1}(v) &= \min\{p_{i+k}(v), \min\{p_{i+k}(u) + \ell(uv) : uv \in A\}\} \\ &= \min\{p_i(v), \min\{p_i(u) + \ell(uv) : uv \in A\}\} \\ &= p_{i+1}(v) \\ &= p_i(v). \end{aligned}$$

La propriété est donc vérifiée pour $k + 1$ et ainsi pour tout $k \geq 1$.

(e) Puisque s est une racine, il existe un (s, v) -chemin dans G . De plus, par hypothèse, (G, ℓ) est sans circuit absorbant. Donc, par l'Exercice 197, il existe un (s, v) -chemin élémentaire P de ℓ -longueur égale à $d_{(G, \ell)}(s, v)$. Par la Remarque 52, P contient au plus $n - 1$ arcs, c'est-à-dire que $P \in \mathcal{P}_{n-1}(v)$ d'où, par (a), $p_{n-1}(v) \leq \ell(P) = d_{(G, \ell)}(s, v) \leq p_n(v) \leq p_{n-1}(v)$; on a donc égalité partout et ainsi (e) est démontré.

(f) Supposons par l'absurde que (G, ℓ) contient un circuit absorbant C . Soit u un sommet quelconque de C . Par la Remarque 48, C est un (u, u) -chemin. Puisque s est une racine de G , il existe, par l'Exercice 128, un (s, u) -chemin élémentaire, donc ayant au plus $n - 1$ arcs. Soit donc P un (s, u) -chemin tel que

$$\ell(P) = p_{n-1}(u).$$

Alors $P' := P + C$ est un (s, u) -chemin. Puisque C est un circuit absorbant, $\ell(C) < 0$, et ainsi

$$\ell(P') = \ell(P) + \ell(C) < \ell(P).$$

Par conséquent et par définition de p_{n-1} , $|A(P')| = n + k$ pour un certain $k \geq 0$. Ainsi, par ce qui précède,

$$p_{n+k}(u) \leq \ell(P') < p_{n-1}(u).$$

Or, par hypothèse, $p_n = p_{n-1}$ et alors par (d), on a $p_{n+k}(u) = p_{n-1}(u)$, ce qui contredit l'inégalité ci-dessus. \square

ALGORITHME DE BELLMAN-FORD :

ENTRÉE : Un réseau $(G = (V, A), \ell)$ et une racine s de G .

SORTIE : Une fonction $\pi : V \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\pi(v) = d_{(G, \ell)}(s, v)$ pour tout sommet v de G , ou bien "G contient un circuit absorbant".

Étape 0 : *Initialisation.*
 $\pi_0(s) := 0, \pi_0(v) := \infty$ pour tout $v \in V \setminus \{s\}, i := 0$.

Étape 1 : *Mise à jour.*
 Pour tout $uv \in A$,
 si $\pi_i(v) > \pi_i(u) + \ell(uv)$ alors $\pi_{i+1}(v) := \pi_i(u) + \ell(uv)$,
 sinon $\pi_{i+1}(v) := \pi_i(v)$.

Étape 2 : *Test de fin d'algorithme.*
 Si $\pi_{i+1} \neq \pi_i$ et $i + 1 < |V|$ alors $i := i + 1$ et aller à l'Étape 1,
 si $\pi_{i+1} = \pi_i$ alors $\pi := \pi_i$ et STOP,
 si $i + 1 = |V|$ alors afficher "G contient un circuit absorbant" et STOP.

FIGURE 2.85 – Algorithme de Bellman-Ford.

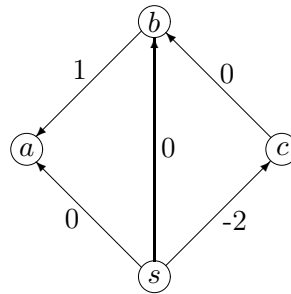


FIGURE 2.86 – Un réseau (G, ℓ) et un sommet s de G .

Exercice 225 Exécuter l'algorithme de Bellman-Ford (FIG.2.85) sur le réseau et le sommet s de la FIG.2.86.

Solution Les valeurs de $\pi_i(v)$ calculées lors du déroulement de l'algorithme de Bellman-Ford sur le réseau (G, ℓ) de la FIG.2.86 sont représentées dans le tableau de la FIG.2.87 où les lignes correspondent aux sommets de G et les colonnes à l'indice i qui est compris entre 1 et 4 car le graphe a quatre sommets. Puisque $\pi_4 = \pi_3$, l'algorithme s'arrête et les deux dernières colonnes fournissent les distances depuis s dans (G, ℓ) .

	0	1	2	3	4
s	0	0	0	0	0
a	∞	0	0	-1	-1
b	∞	0	-2	-2	-2
c	∞	-2	-2	-2	-2

FIGURE 2.87 – Déroulement de l'algorithme de Bellman-Ford sur le réseau de la FIG.2.86.

□

Exercice 226 (Justification de l'algorithme de Bellman-Ford (FIG. 2.85))

Montrer que

- (a) au cours de l'exécution de l'algorithme la fonction π_i calculée satisfait : $\pi_i(v)$ est égal à la ℓ -longueur minimum d'un (s, v) -chemin ayant au plus i arcs dans (G, ℓ) pour tout $v \in V$,
 (b) l'algorithme se termine avec une fonction π qui est égale à la distance depuis s dans (G, ℓ) ou bien (G, ℓ) contient un circuit absorbant.

Solution (a) On va montrer par récurrence sur i que π_i est égal à la fonction p_i définie à l'Exercice 224. Pour $i = 0$, s est le seul sommet atteignable depuis s par un chemin n'ayant aucun arc, ce qui correspond bien à la fonction π_0 définie à l'initialisation.

Supposons maintenant que (a) est bien vérifié jusqu'à $i \geq 0$ et que l'algorithme a calculé π_{i+1} . Par la mise à jour à l'Étape 1, l'hypothèse de récurrence et (c) de l'Exercice 224, on a pour tout $v \in V$,

$$\begin{aligned}\pi_{i+1}(v) &= \min\{\pi_i(v), \min\{\pi_i(u) + \ell(uv) : uv \in A\}\} \\ &= \min\{p_i(v), \min\{p_i(u) + \ell(uv) : uv \in A\}\} \\ &= p_{i+1}(v).\end{aligned}$$

Alors (a) est bien vérifié pour $i + 1$ et ainsi (a) est démontré.

(b) On note $n := |V|$. Par le test de fin d'algorithme, les Étapes 1 et 2 sont exécutées au plus n fois. Puisque chaque étape de l'algorithme utilise un nombre fini d'opérations élémentaires ($\leq n + |A|$) et que le nombre d'étapes exécutées est fini ($\leq 2n + 1$), l'algorithme se termine.

Si l'algorithme se termine parce que $\pi_{i+1} = \pi_i$ et $i \leq n - 1$ alors, par (a), $p_{i+1} = p_i$. Par (d) de l'Exercice 224, on a $p_i = p_{n-1} = p_n$. On conclut, par (f) et (e) de l'Exercice 224, que $(G = (V, A), \ell)$ est un réseau sans circuit absorbant et que $p_i = p_{n-1} = d_{(G, \ell)}(s, \cdot)$.

Si l'algorithme se termine parce que $i + 1 = n$ et $\pi_{i+1} \neq \pi_i$ alors, par (a), $p_n = \pi_n \neq \pi_{n-1} = p_{n-1}$ et ainsi, par (e) de l'Exercice 224, (G, ℓ) contient un circuit absorbant. \square

Algorithme de Floyd-Warshall

Exercice 227 Soit (G, ℓ) un réseau sans circuit absorbant dont les sommets sont notés $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Pour tout $0 \leq k \leq n$ et pour tout couple (i, j) , $1 \leq i, j \leq n$, on note $w_k(i, j)$ la ℓ -longueur minimum d'un (v_i, v_j) -chemin dans (G, ℓ) , dont les sommets intérieurs sont d'indice au plus k . Montrer que pour toutes les valeurs possibles de i, j et k ,

- (a) $w_k(i, j) \leq w_{k-1}(i, j)$.
 (b) $w_k(i, j) \leq w_{k-1}(i, k) + w_{k-1}(k, j)$.
 (c) $w_k(i, j) = \min\{w_{k-1}(i, j), w_{k-1}(i, k) + w_{k-1}(k, j)\}$.
 (d) $w_n(i, j) = d_{(G, \ell)}(v_i, v_j)$.

Solution On note $\mathcal{W}_k(i, j)$ l'ensemble des (v_i, v_j) -chemins dont les sommets intérieurs sont d'indice au plus k , c'est-à-dire l'ensemble des (v_i, v_j) -chemins dans le sous-graphe de G induit par l'ensemble de sommets $V_k(i, j) := \{v_1, \dots, v_k\} \cup \{v_i, v_j\}$. Par définition,

$$w_k(i, j) = \min\{\ell(P) : P \in \mathcal{W}_k(i, j)\}. \quad (2.48)$$

(a) Puisque $\mathcal{W}_{k-1}(i, j) \subseteq \mathcal{W}_k(i, j)$, par (2.48), on en déduit que $w_k(i, j) \leq w_{k-1}(i, j)$.

(b) Si $\mathcal{W}_{k-1}(i, k) = \emptyset$ ou $\mathcal{W}_{k-1}(k, j) = \emptyset$ alors $w_{k-1}(i, k) = \infty$ ou $w_{k-1}(k, j) = \infty$ et l'inégalité voulue est bien vérifiée. Sinon soit $P \in \mathcal{W}_{k-1}(i, k)$ et $Q \in \mathcal{W}_{k-1}(k, j)$ tels que $\ell(P) = w_{k-1}(i, k)$ et $\ell(Q) = w_{k-1}(k, j)$. Alors $P + Q \in \mathcal{W}_k(i, j)$ donc

$$w_k(i, j) \leq \ell(P + Q) = \ell(P) + \ell(Q) = w_{k-1}(i, k) + w_{k-1}(k, j).$$

(c) D'après (a) et (b), on a

$$w_k(i, j) \leq \min\{w_{k-1}(i, j), w_{k-1}(i, k) + w_{k-1}(k, j)\}. \quad (2.49)$$

Il reste à montrer qu'on a aussi l'inégalité inverse :

$$w_k(i, j) \geq \min\{w_{k-1}(i, j), w_{k-1}(i, k) + w_{k-1}(k, j)\}. \quad (2.50)$$

On distingue trois cas.

- Si $\mathcal{W}_k(i, j) = \emptyset$, alors $w_k(i, j) = \infty$ et ainsi (2.50) est vérifié.
- Sinon, par l'Exercice 197(b), il existe dans $G[V_k(i, j)]$ un (v_i, v_j) -chemin élémentaire $P \in \mathcal{W}_k(i, j)$ tel que $\ell(P) = w_k(i, j)$.
 - Si $P \in \mathcal{W}_{k-1}(i, j)$ alors $w_{k-1}(i, j) \leq \ell(P) = w_k(i, j)$ et donc (2.50) est vérifié.
 - Sinon $v_k \in V(P)$. Soient $P_1 = P[v_i, v_k]$ et $P_2 = P[v_k, v_j]$. Puisque $P \in \mathcal{W}_k(i, j)$ et est élémentaire, $P_1 \in \mathcal{W}_{k-1}(i, k)$ et $P_2 \in \mathcal{W}_{k-1}(k, j)$ et donc

$$w_k(i, j) = \ell(P) = \ell(P_1 + P_2) = \ell(P_1) + \ell(P_2) \geq w_{k-1}(i, k) + w_{k-1}(k, j).$$

et (2.50) est à nouveau vérifié.

(d) Puisque $G[V_n(i, j)] = G$, par définition, $w_n(i, j) = d_{(G, \ell)}(v_i, v_j)$. □

ALGORITHME DE FLOYD-WARSHALL :

ENTRÉE : Un réseau (G, ℓ) sans circuit absorbant dont les sommets sont notés $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

SORTIE : Une fonction $\omega : V \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\omega(i, j) = d_{(G, \ell)}(v_i, v_j)$ pour tout couple (v_i, v_j) de sommets de G .

Étape 0 : *Initialisation.*

pour tout $1 \leq i \leq n$, $\omega_0(i, i) := 0$,

pour tout couple (i, j) tel que $1 \leq i, j \leq n$ et $i \neq j$,

si $v_i v_j \in A$ alors $\omega_0(i, j) := \ell(v_i v_j)$,

sinon $\omega_0(i, j) := \infty$,

$k := 1$.

Étape 1 : *Mise à jour.*

Tant que $k \leq n$ faire :

pour tout couple (i, j) tel que $1 \leq i, j \leq n$ et $i \neq j$,

$\omega_k(i, j) = \min\{\omega_{k-1}(i, j), \omega_{k-1}(i, k) + \omega_{k-1}(k, j)\}$,

$k := k + 1$.

Étape 2 : *Fin d'algorithme.*

$\omega := \omega_n$ et STOP.

FIGURE 2.88 – Algorithme de Floyd-Warshall.

Exercice 228 Exécuter l'algorithme de Floyd-Warshall (FIG.2.88) sur le réseau sans circuit absorbant de la FIG.2.89.

Solution Les valeurs de $\omega_k(i, j)$ ($0 \leq k \leq 4$) calculées lors du déroulement de l'algorithme de Floyd-Warshall sur le réseau (G, ℓ) sans circuit absorbant de la FIG.2.89 sont représentées dans le $(k + 1)$ -ème tableau de la FIG.2.90, où les quatre lignes et les quatre colonnes correspondent aux quatre sommets de G . □

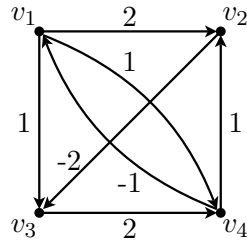


FIGURE 2.89 – Un réseau (G, ℓ) et un sommet s de G .

0	2	1	1
∞	0	-2	∞
∞	∞	0	2
-1	1	∞	0

0	2	1	1
∞	0	-2	∞
∞	∞	0	2
-1	1	0	0

0	2	0	1
∞	0	-2	∞
∞	∞	0	2
-1	1	-1	0

0	2	0	1
∞	0	-2	0
∞	∞	0	2
-1	1	-1	0

0	2	0	1
-1	0	-2	0
1	3	0	2
-1	1	-1	0

FIGURE 2.90 – Déroulement de l’algorithme de Floyd-Warshall sur le réseau de la FIG.2.89.

Exercice 229 (Justification de l’algorithme de Floyd-Warshall (FIG. 2.88))

- (a) Montrer que, pour tout k entre 0 et n , tout couple (i, j) tel que $1 \leq i, j \leq n$, on a que $\omega_k(i, j)$ est égal à la ℓ -longueur minimum d’un (v_i, v_j) -chemin dans (G, ℓ) , dont les sommets intérieurs sont d’indice au plus k .
- (b) En déduire que l’algorithme se termine avec une fonction ω égale à la fonction de distance $\mathfrak{d}_{(G, \ell)}$.

Solution (a) On va montrer par récurrence sur k que la fonction ω_k est égale à la fonction w_k définie à l’Exercice 227. Pour $k = 0$, par l’initialisation, $\omega_0(i, j)$ est égal à la ℓ -longueur minimum d’un (v_i, v_j) -chemin dans (G, ℓ) n’ayant aucun sommet intérieur qui, par définition, est égale à $w_0(i, j)$.

Supposons maintenant que (a) est bien vérifié pour $k - 1$ ($1 \leq k \leq n$). Par la mise à jour à l’Étape 1, l’hypothèse de récurrence et (c) de l’Exercice 227, on a pour tout $v \in V$,

$$\begin{aligned} \omega_k(i, j) &= \min\{\omega_{k-1}(i, j), \omega_{k-1}(i, k) + \omega_{k-1}(k, j)\} \\ &= \min\{w_{k-1}(i, j), w_{k-1}(i, k) + w_{k-1}(k, j)\} \\ &= w_k(i, j). \end{aligned}$$

Alors (a) est bien vérifié pour k et ainsi (a) est démontré.

(b) Par la définition de ω à l’Étape 2, (a), et (d) de l’Exercice 227, on a $\omega = \omega_n = w_n = \mathfrak{d}_{(G, \ell)}$

Algorithme de Ford-Fulkerson-Dantzig

Exercice 230 Appliquer l’algorithme de Ford-Fulkerson-Dantzig (FIG. 2.91) dans le réseau de la FIG. 2.92, en considérant que l’initialisation a fourni l’arborescence indiquée sur la figure, pour trouver une s -arborescence de plus courts chemins ou bien un circuit absorbant.

Solution Un déroulement de l’algorithme de Ford-Fulkerson-Dantzig sur le réseau (G, ℓ) de la FIG.2.92 est représenté FIG.2.93. Sur chaque copie de G , les arcs en gras sont ceux de l’arborescence courante F_i , les valeurs à côté de chaque sommet sont celles du π_i courant ; les sommets encadrés sont les extrémités de l’arc $u_i v_i$ courant détecté à l’Étape 3 et sa ℓ -longueur est indiquée à côté. Sur la dernière copie de G on peut facilement vérifier que la fonction π_4 est un potentiel

ALGORITHME DE FORD-FULKERSON-DANTZIG :

ENTRÉE : Un réseau $(G = (V, A), \ell)$ et une racine s de G .

SORTIE : Une s -arborescence couvrante F de plus courts chemins ainsi que π la fonction de distance depuis s dans (G, ℓ) , ou bien un circuit absorbant C de (G, ℓ) .

Étape 1 : *Initialisation.*
 Appliquer l'algorithme de Marquage Orienté (FIG. 2.24) au graphe orienté G et au sommet s pour obtenir une s -arborescence couvrante F_1 de G , $i := 1$.

Étape 3 : *Modification de l'arborescence.*
 Appliquer l'algorithme Distances dans une arborescence (FIG. 2.77) au réseau (F_i, ℓ) pour obtenir $\pi_i(v) = d_{(F_i, \ell)}(s, v)$ pour tout $v \in V$.
 S'il existe un arc $u_i v_i$ de G pour lequel $\pi_i(v_i) - \pi_i(u_i) > \ell(u_i v_i)$ alors
 appliquer l'algorithme Chemin dans une Arborescence (FIG. 2.31) à F_i et u_i
 pour
 obtenir le (s, u_i) -chemin unique P_i de F_i ,
 si $v_i \notin V(P_i)$ alors $F_{i+1} := F_i - F_i(v_i) + u_i v_i$, $i := i + 1$, aller à l'Étape 3,
 sinon aller à l'Étape 4,
 sinon aller à l'Étape 5.

Étape 4 : *Circuit absorbant.*
 $C := P_i[v_i, u_i] + u_i v_i$ et STOP.

Étape 5 : *Arborescence de plus courts chemins.*
 $F := F_i$, $\pi := \pi_i$ et STOP.

FIGURE 2.91 – Algorithme de Ford-Fulkerson-Dantzig.

du réseau (G, ℓ) et l'algorithme s'arrête avec cette arborescence F de plus courts chemins depuis s .

On note que l'arc de 2 à 1, qui appartient à l'arborescence initiale, en sort à la première itération et y revient à la dernière itération. \square

Remarque 98 *L'Exemple de l'Exercice 230 montre que lors d'une exécution de l'algorithme de Ford-Fulkerson-Dantzig il est possible qu'un arc sorte de l'arborescence et qu'il y entre plus tard.*

Exercice 231 *Appliquer l'algorithme de Ford-Fulkerson-Dantzig (FIG. 2.91) dans le réseau de la FIG. 2.94, en considérant que l'initialisation a fourni l'arborescence indiquée sur la figure, pour trouver une s -arborescence de plus courts chemins ou bien un circuit absorbant. On étudiera les deux cas :*

- (1) $d = 1$,
- (2) $d = -3$.

Solution (1) Un déroulement de l'algorithme de Ford-Fulkerson-Dantzig sur le réseau (G, ℓ) de la FIG.2.94 dans le cas où $d = 1$ est représenté dans la partie (1) de la FIG.2.95. Sur chaque copie de G , les arcs en gras sont ceux de l'arborescence courante F_i , les valeurs à côté de chaque sommet sont celles du π_i courant ; les sommets encerclés sont les extrémités de l'arc $u_i v_i$ courant détecté à l'Étape 3 et sa ℓ -longueur est indiquée à côté. Sur la dernière copie de G on peut facilement vérifier que la fonction π_6 est un potentiel du réseau (G, ℓ) et l'algorithme s'arrête avec cette arborescence F de plus courts chemins depuis s .

(2) On peut supposer que les 6 premières exécutions de l'Étape 3 lors d'un déroulement de l'algorithme de Ford-Fulkerson-Dantzig sur le réseau (G, ℓ) de la FIG.2.94 dans le cas où $d = -3$

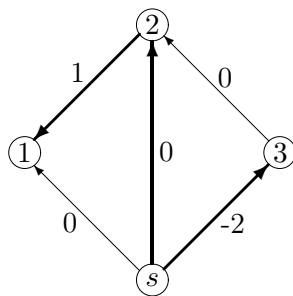


FIGURE 2.92 – Un réseau (G, ℓ) , un sommet s et une s -arborescence de G .

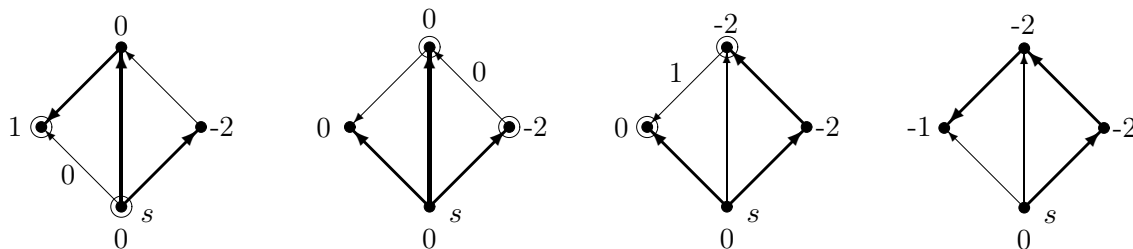


FIGURE 2.93 – Déroulement de l’algorithme de Ford-Fulkerson-Dantzig sur le réseau de la FIG.2.92.

sont identiques à celles du cas $d = 1$ et sont donc représentées dans la partie (1) de la FIG.2.95. Lors de la 7ème exécution de l’Étape 3, l’algorithme détecte l’arc de 1 à 2 qui conduit au circuit absorbant C de ℓ -longueur -1 représenté dans la partie (2) de la FIG.2.95. □

Exercice 232 Appliquer au réseau de la FIG. 2.96 l’algorithme de
 (1) Dijkstra (FIG. 2.81) lorsque la ℓ -longueur d de l’arc de 4 à 1 est égale à 7,
 (2) Ford-Fulkerson-Dantzig (FIG. 2.91) lorsque $d = -7$ et en considérant que l’initialisation a fourni l’arborescence trouvée lors de la résolution de la partie (1).

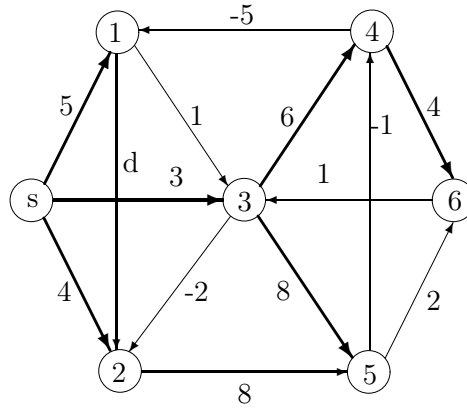
Solution (1) Similairement à la solution de l’Exercice 221, le déroulement de l’algorithme de Dijkstra sur le réseau de la FIG.2.96 lorsque $d = 7$ est représenté FIG.2.97.

(2) Le déroulement de l’algorithme de Ford-Fulkerson-Dantzig sur le réseau de la FIG.2.96 lorsque $d = -7$ et que l’arborescence trouvée à l’initialisation est celle obtenue lors de la résolution de la partie (1) (voir en bas à droite FIG.2.97) est représenté FIG.2.98. Lors de la première exécution de l’Étape 3, l’algorithme détecte l’arc de 4 à 1 qui conduit au circuit absorbant C de ℓ -longueur -1 représenté en pointillé FIG.2.98. □

Exercice 233 Appliquer au réseau de la FIG. 2.99 l’algorithme de
 (1) Dijkstra (FIG. 2.81) lorsque $d = 4$,
 (2) Ford-Fulkerson-Dantzig (FIG. 2.91) lorsque $d = -4$ et en considérant que l’initialisation a fourni l’arborescence trouvée lors de la résolution de la partie (1).

Solution (1) Similairement à la solution de l’Exercice 221, le déroulement de l’algorithme de Dijkstra sur le réseau de la FIG.2.99 lorsque $d = 4$ est représenté FIG.2.100.

(2) Le déroulement de l’algorithme de Ford-Fulkerson-Dantzig sur le réseau de la FIG.2.99 lorsque $d = -4$ et que l’arborescence trouvée à l’initialisation est celle obtenue lors de la résolution

FIGURE 2.94 – Un réseau (G, ℓ) , un sommet s et une s -arborescence de G .

de la partie (1) (voir en bas à droite FIG.2.100) est représenté FIG.2.101. Sur la dernière copie de G on peut facilement vérifier que la fonction π_3 est un potentiel du réseau (G, ℓ) et l'algorithme s'arrête avec cette arborescence F de plus courts chemins depuis s . \square

Exercice 234 (Justification de l'algorithme de Ford-Fulkerson-Dantzig)

Montrer que

- chaque F_i calculé au cours de l'algorithme est une s -arborescence couvrante de G ,
- si l'algorithme se termine à l'Étape 4, alors C est un circuit absorbant,
- si l'algorithme se termine à l'Étape 5, alors F_i est une s -arborescence couvrante de plus courts chemins de (G, ℓ) ,
- pour tout π_{i+1} calculé au cours de l'algorithme, on a $\sum_{v \in V} \pi_{i+1}(v) < \sum_{v \in V} \pi_i(v)$,
- l'algorithme se termine en temps fini.

Solution (a) On raisonne par récurrence sur i . Si $i = 1$ alors, par l'initialisation, F_1 est une s -arborescence couvrante de G . Supposons que (a) est vrai pour i , c'est-à-dire que F_i est une s -arborescence couvrante de G . Si l'algorithme a calculé F_{i+1} , alors à la i -ème exécution de l'Étape 3, on a $v_i \notin V(P_i)$ et $F_{i+1} = F_i - F_i(v_i) + u_i v_i$. Par l'Exercice 153, appliqué à la s -arborescence couvrante $F = F_i$ de G , aux sommets $u = u_i, v = v_i$ et à l'arc $e = F_i(v_i)$ entrant en v_i , on obtient que F_{i+1} est une s -arborescence couvrante de G .

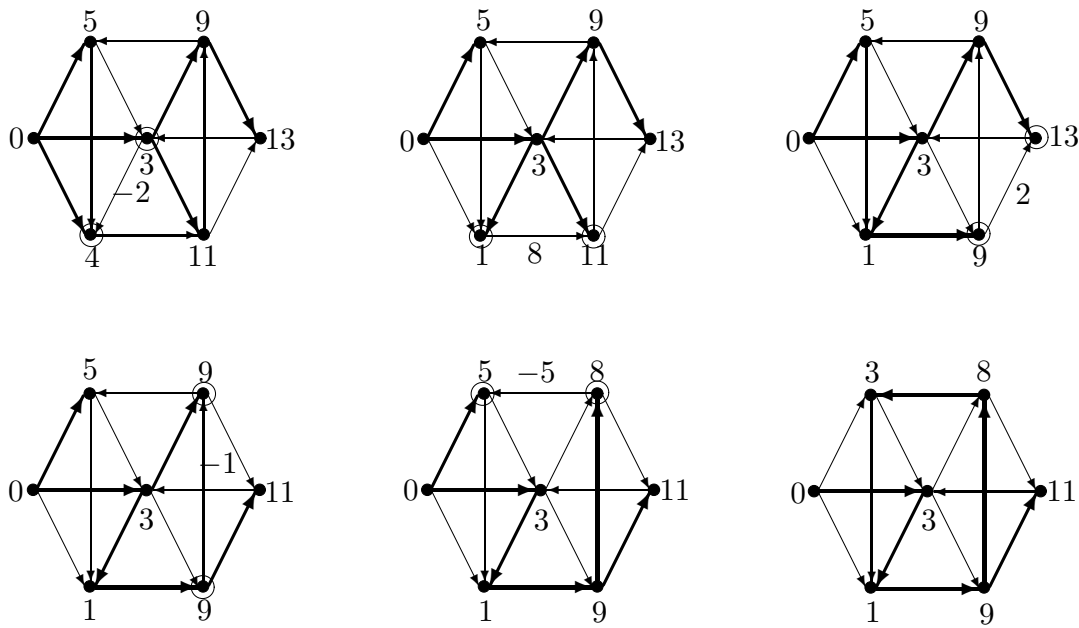
(b) Si l'algorithme se termine à l'Étape 4, alors $v_i \in V(P_i)$ et ainsi $C = P_i[v_i, u_i] + u_i v_i$ est un circuit. Alors, par définition de C , de P_i , de π_i et l'hypothèse sur l'arc $u_i v_i$, on a

$$\begin{aligned} \ell(C) &= \ell(P_i[v_i, u_i]) + \ell(u_i v_i) \\ &= \ell(P_i[s, u_i]) - \ell(P_i[s, v_i]) + \ell(u_i v_i) \\ &= \pi_i(u_i) - \pi_i(v_i) + \ell(u_i v_i) \\ &< 0, \end{aligned}$$

autrement dit, le circuit C est absorbant.

(c) Si l'algorithme se termine à l'Étape 5, alors à l'Étape 3 tout arc uv de G vérifie $\pi_i(v) - \pi_i(u) \leq \ell(uv)$, et ainsi π_i est un potentiel de (G, ℓ) . Par (a), on sait que F_i est une s -arborescence couvrante de G . Par l'Exercice 152(c), F_i est sans circuit, donc (F_i, ℓ) est sans circuit absorbant. Soit w un sommet quelconque de V . Par l'Exercice 144, il existe un unique (s, w) -chemin P dans

(1)



(2)

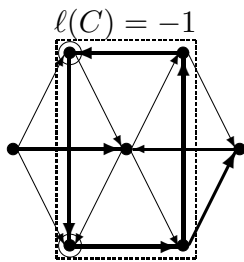


FIGURE 2.95 – Déroulements de l’algorithme de Ford-Fulkerson-Dantzig sur le réseau de la FIG.2.94 selon les valeurs de d indiquées dans l’Exercice 231.

F_i qui est donc un plus court (s, w) -chemin dans (F_i, ℓ) . Par l’Exercice 210 appliqué à $(F_i, \ell), y, P$ et π_i (potentiel de (G, ℓ) et donc de (F_i, ℓ)), tous les arcs de P sont π_i -serrés. Ainsi, d’après l’Exercice 209 appliqué à $(G, \ell), \pi_i$ (potentiel de (G, ℓ)) et P , on a que P est un (s, y) -chemin de ℓ -longueur minimum dans (G, ℓ) . On en conclut que F_i est une s -arborescence couvrante de plus courts chemins de (G, ℓ) .

(d) Puisque, par hypothèse, π_{i+1} a été calculé par l’algorithme, on sait, par (a), que F_i et F_{i+1} sont des s -arborescences couvrantes de G . Notons que, pour tout $v \in V$, $\pi_i(v)$ (respectivement $\pi_{i+1}(v)$) est égal à la ℓ -longueur de l’unique (s, v) -chemin dans la s -arborescence F_i (respectivement F_{i+1}).

Par définition, $F_{i+1} = F_i - F_i(v_i) + u_i v_i$ où l’arc $u_i v_i$ vérifie

$$\pi_i(v_i) - \pi_i(u_i) > \ell(u_i v_i). \tag{2.51}$$

Soit V_i l’ensemble des sommets de la sous-arborescence $F_i^{[v_i]}$ de F_i de racine v_i . Par la définition

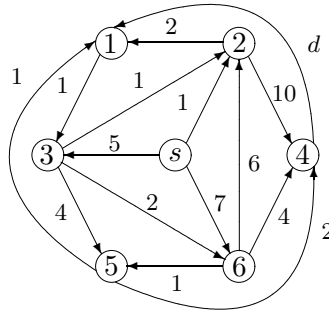


FIGURE 2.96 – Un réseau (G, ℓ) et un sommet s .

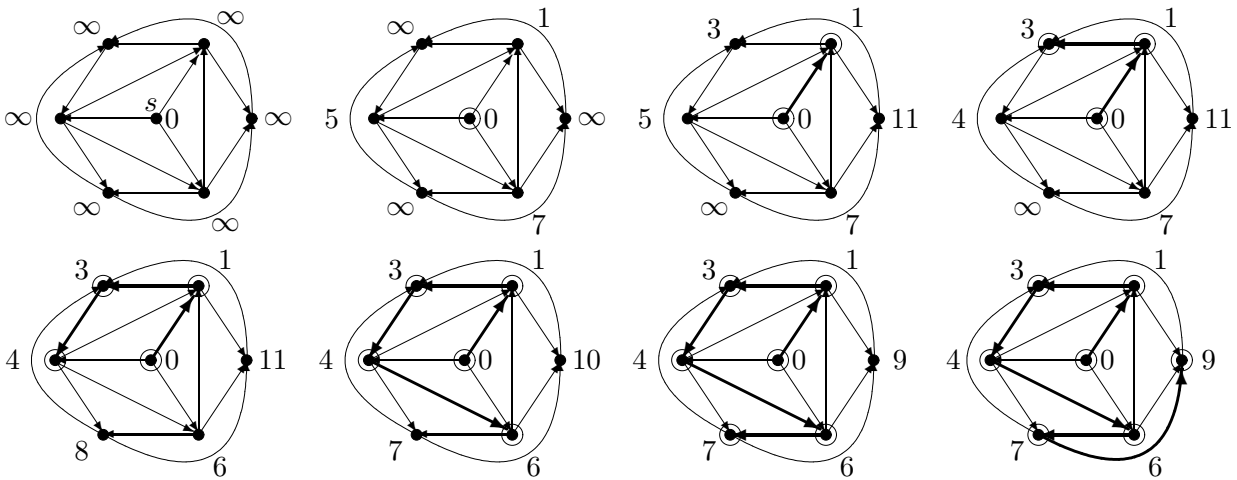


FIGURE 2.97 – Déroulement de l’algorithme de Dijkstra sur le réseau de la FIG.2.96 lorsque $d = 7$.

de F_{i+1} (voir (FIG. 2.102)), on a

$$F_{i+1}^{[v_i]} = F_i^{[v_i]}, \tag{2.52}$$

$$F_{i+1} - V_i = F_i - V_i. \tag{2.53}$$

Pour démontrer la propriété il suffit de montrer que $\pi_{i+1}(v) \leq \pi_i(v)$ pour tout $v \in V$ et que $\pi_{i+1}(v_i) < \pi_i(v_i)$. Nous distinguons trois cas selon l’appartenance de v à $V \setminus V_i, \{v_i\}$ ou V_i .

- (1) Si $v \in V \setminus V_i$. Puisque, par (2.53) et l’Exercice 143, $F_{i+1} - V_i = F_i - V_i$ est une s -arborescence, on a $\pi_{i+1}(v) = \pi_i(v)$.
- (2) Si $v = v_i$. Puisque $u_i v_i$ est un arc de F_{i+1} , on a $u_i \notin V(F_{i+1}^{[v_i]})$, et ainsi $u_i \in V \setminus V_i$. Par (1), $\pi_{i+1}(u_i) = \pi_i(u_i)$. Puisque la concaténation de l’unique (s, u_i) -chemin dans F_{i+1} et de l’arc $u_i v_i$ est l’unique (s, v_i) -chemin dans F_{i+1} , on a, par (2.51),

$$\pi_{i+1}(v_i) = \pi_{i+1}(u_i) + \ell(u_i v_i) = \pi_i(u_i) + \ell(u_i v_i) < \pi_i(v_i).$$

- (3) Si $v \in V_i$. Soit Q_v l’unique (v_i, v) -chemin dans $F_{i+1}^{[v_i]}$. Par (2.52), Q_v est l’unique (v_i, v) -chemin dans $F_i^{[v_i]}$. Puisque la concaténation de l’unique (s, v_i) -chemin dans F_{i+1} (respectivement F_i) et de Q_v est l’unique (s, v) -chemin dans F_{i+1} (respectivement F_i), et par (2), on a

$$\pi_{i+1}(v) = \pi_{i+1}(v_i) + \ell(Q_v) < \pi_i(v_i) + \ell(Q_v) = \pi_i(v).$$

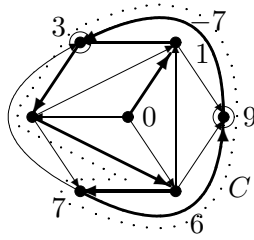


FIGURE 2.98 – Déroulement de l’algorithme de Ford-Fulkerson-Dantzig sur le réseau de la FIG.2.96 lorsque $d = -7$.

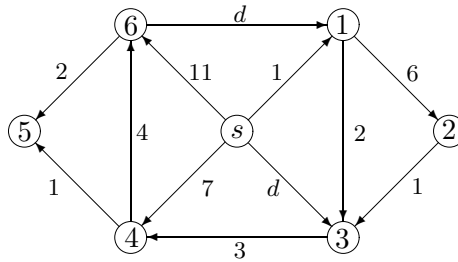


FIGURE 2.99 – Un réseau (G, ℓ) et un sommet s .

(e) D’après (d), $F_i \neq F_j$ si $i \neq j$. Comme le nombre de s -arborescences couvrantes de G est fini, l’algorithme se termine en temps fini. \square

Remarque 99 Nous remarquons que dans un réseau (G, ℓ) on peut résoudre le problème des plus longs chemins ou trouver un circuit de ℓ -longueur strictement positive en appliquant l’algorithme de Ford-Fulkerson-Dantzig (FIG. 2.91) au réseau $(G, -\ell)$. De manière équivalente, on peut résoudre ce problème en appliquant à (G, ℓ) une version modifiée de l’algorithme de Ford-Fulkerson-Dantzig (FIG. 2.91) où l’inégalité de l’Étape 3 est remplacée par $\pi_i(v_i) - \pi_i(u_i) < \ell(u_i v_i)$.

Une s -arborescence de plus longs chemins de (G, ℓ) est une s -arborescence F de G telle que ses sommets sont les sommets atteignables depuis s dans G et le chemin unique de s à v dans F est de ℓ -longueur égale à la ℓ -longueur maximum d’un (s, v) -chemin dans G pour tout sommet v de F .

Remarque 100 Par l’Exercice 211 appliqué au réseau $(G, -\ell)$, un réseau (G, ℓ) sans circuit de ℓ -longueur strictement positive contient une s -arborescence de plus longs chemins pour tout sommet s de G .

2.12 Applications des plus courts chemins

Exercice 235 Un agent de change reçoit de la bourse les taux de change t_{ij} pour chaque couple de devises i et j : à un client qui lui donne une unité de devise i il doit rendre t_{ij} unités de devise j . Il s’inquiète de savoir s’il existe une suite circulaire d’échanges de devises qui pourrait diminuer son capital si un client demande de la réaliser.

Pouvez-vous l’aider en modélisant ce problème comme un problème de recherche d’un circuit absorbant dans un réseau ?

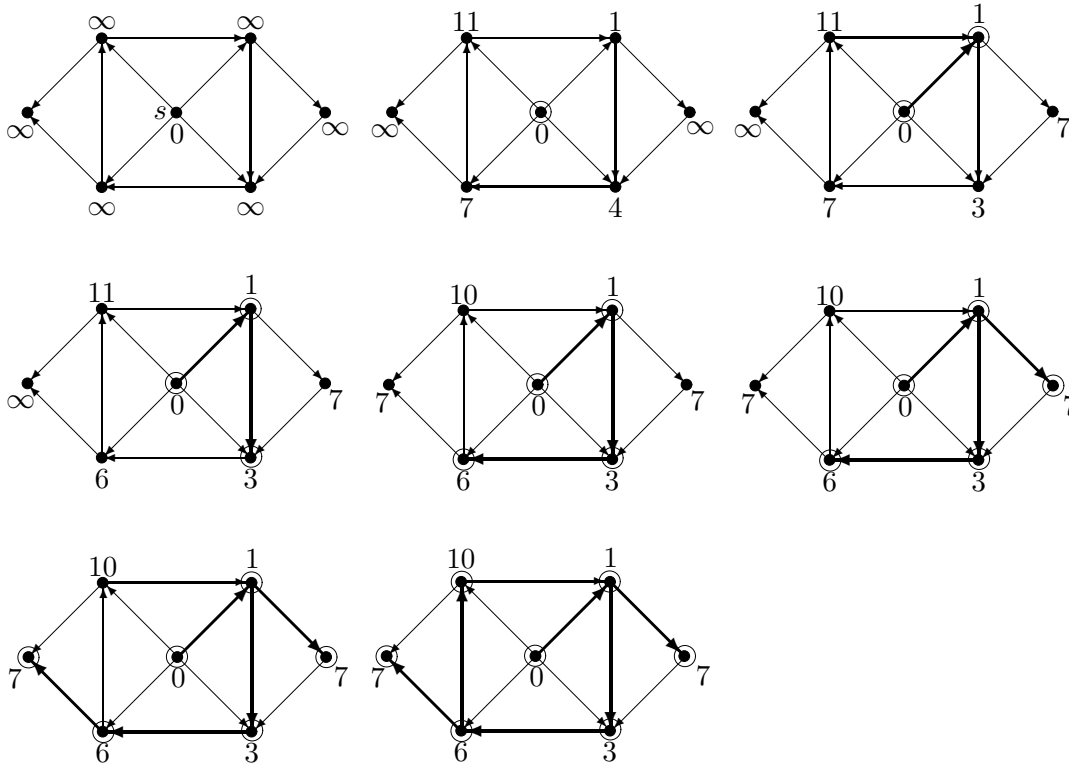


FIGURE 2.100 – Déroulement de l’algorithme de Dijkstra sur le réseau de la FIG.2.99 lorsque $d = 4$.

Solution On considère une suite circulaire $i_1, i_2, \dots, i_k = i_1$ de devises. Un client, qui effectue l’échange d’une unité de i_1 en $t_{i_1 i_2}$ unités de i_2 , puis l’échange des unités de i_2 obtenues en $t_{i_1 i_2} \cdot t_{i_2 i_3}$ unités de i_3 et ainsi de suite, obtient $\prod_{j=1}^{k-1} t_{i_j i_{j+1}}$ unités de devise i_1 . Finalement, l’agent de change a reçu une unité de devise i_1 et en a rendu $\prod_{j=1}^{k-1} t_{i_j i_{j+1}}$ unités. Donc si $\prod_{j=1}^{k-1} t_{i_j i_{j+1}} > 1$, alors l’agent a diminué son capital.

On introduit un réseau (G, ℓ) défini de la manière suivante : l’ensemble des sommets de G est égal à l’ensemble des devises et pour chaque couple (i, j) de devises, G contient un arc ij de ℓ -longueur égale à $-\log(t_{ij})$. Par cette définition, les suites circulaires de devises sont en bijection avec les circuits de G .

Soit C un circuit de G . La suite circulaire de devises correspondant à C est défavorable à l’agent de change si et seulement si $1 < \prod_{ij \in A(C)} t_{ij}$, ce qui est équivalent à $0 < \log(\prod_{ij \in A(C)} t_{ij})$ et donc à

$$0 > -\log\left(\prod_{ij \in A(C)} t_{ij}\right) = \sum_{ij \in A(C)} -\log(t_{ij}) = \sum_{ij \in A(C)} \ell(ij) = \ell(C).$$

L’agent de change doit alors vérifier si le réseau (G, ℓ) contient ou non un circuit absorbant, ce qu’il peut faire en utilisant l’algorithme de Bellman-Ford (FIG.2.85). □

Exercice 236 Une compagnie de navigation offre des transports réguliers par bateau entre les différentes villes autour du lac Balaton en Hongrie (voir FIG.2.103). Pour chaque couple (x, y) de villes, le trajet direct de x à y dure d_{xy} minutes et rapporte r_{xy} Forints. Le rapport moyen d’un trajet circulaire C est défini comme la somme des rapports des trajets directs qui constituent C divisée par la somme des durées de ces trajets directs. Le problème du directeur de la compagnie

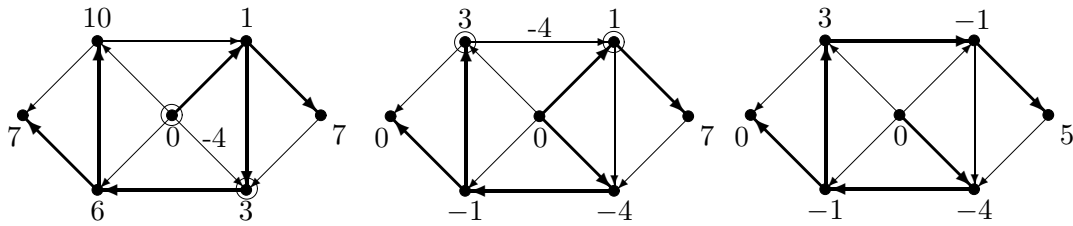


FIGURE 2.101 – Déroulement de l’algorithme de Ford-Fulkerson-Dantzig sur le réseau de la FIG.2.99 lorsque $d = -4$.

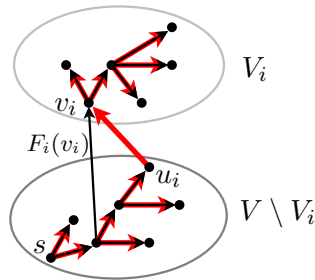


FIGURE 2.102 – Illustration de la construction de F_{i+1} à partir de F_i dans l’algorithme de Ford-Fulkerson-Dantzig (FIG. 2.91).

est de trouver, s’il existe, un trajet circulaire dont le rapport moyen est supérieur à une valeur fixée R .

Pouvez-vous l’aider en modélisant ce problème comme un problème de recherche d’un circuit absorbant dans un réseau ?



FIGURE 2.103 – Les villes autour du lac Balaton et un exemple de trajet circulaire.

Solution On introduit un réseau (G, ℓ) défini de la manière suivante : l’ensemble des sommets de G est égal à l’ensemble des villes autour du Lac Balaton et pour chaque couple (i, j) de villes, G contient un arc ij de ℓ -longueur égale à $Rd_{ij} - r_{ij}$.

Décider s’il existe un trajet circulaire dont le rapport moyen est supérieur à une valeur fixée R est équivalent à chercher un circuit C de G tel que

$$\frac{\sum_{ij \in A(C)} r_{ij}}{\sum_{ij \in A(C)} d_{ij}} > R,$$

autrement dit tel que

$$0 > \sum_{ij \in A(C)} (Rd_{ij} - r_{ij}) = \sum_{ij \in A(C)} \ell(ij) = \ell(C),$$

c'est-à-dire un circuit absorbant C de (G, ℓ) .

Le directeur de la compagnie doit alors décider si le réseau (G, ℓ) contient un circuit absorbant et si oui en trouver un ; ce qu'il peut faire en utilisant l'algorithme de Ford-Fulkerson-Dantzig (FIG.2.91). \square

Exercice 237 *Étant donné un système d'inéquations dont l'ensemble des variables est $\{x_1, \dots, x_n\}$ et dont toutes les inéquations sont de la forme $x_j - x_i \leq b_{ij}$; le problème est de trouver une solution de ce système ou bien de déterminer un ensemble d'inéquations contradictoires.*

- (a) *Modéliser ce problème comme un problème de recherche d'un potentiel ou d'un circuit absorbant dans un réseau.*
 (b) *Traiter les exemples suivants :*

Exemple 1 :

$$\begin{aligned} x_3 - x_4 &\leq 6 \\ x_4 - x_1 &\leq 5 \\ x_1 - x_3 &\leq 4 \\ x_3 - x_2 &\leq 3 \\ x_2 - x_1 &\leq -7 \end{aligned}$$

Exemple 2 :

$$\begin{aligned} x_3 - x_4 &\leq 6 \\ x_4 - x_1 &\leq 5 \\ x_1 - x_3 &\leq 4 \\ x_3 - x_2 &\leq 3 \\ x_2 - x_1 &\leq -8 \end{aligned}$$

Solution (a) Pour modéliser ce problème il faut remarquer que les inéquations de la forme considérée correspondent aux inéquations (2.25) dans le réseau (G, ℓ) défini comme suit : l'ensemble des sommets est égal à $\{1, \dots, n\}$ et à chaque inéquation $x_j - x_i \leq b_{ij}$ est associé un arc ij de ℓ -longueur b_{ij} . Si (G, ℓ) possède un potentiel π alors $x_i := \pi(i)$ est une solution du système. Sinon, par l'Exercice 205, il existe un circuit absorbant C dont l'ensemble des arcs correspond à un ensemble d'inéquations contradictoires. En effet, en additionnant ces inéquations on obtient la contradiction suivante : $0 \leq \ell(C) < 0$.

(b) On peut résoudre les Exemples 1 et 2 en construisant le réseau (G, ℓ) de la façon indiquée dans la solution de (a), voir le réseau de gauche des FIG. 2.104 et FIG. 2.105. Notons que, dans les deux cas, le sommet 1 est une racine de G , on peut donc appliquer l'algorithme de Ford-Fulkerson-Dantzig (FIG.2.91) à (G, ℓ) .

Pour l'Exemple 1, on obtient alors une 1-arborescence de plus courts chemins ainsi que la fonction de distance depuis 1 indiquées en rouge sur le réseau de droite de la FIG. 2.104. Par la Remarque 91, cette fonction de distance est un potentiel de (G, ℓ) et ainsi, par la réponse proposée en (a), une solution du système d'inéquations est $x_1 = 0, x_2 = -7, x_3 = -4$ et $x_4 = 5$.



FIGURE 2.104 – Solution de l'Exemple 1 de l'Exercice 237(b).

Pour l'Exemple 2, on obtient alors le circuit absorbant indiqué en rouge sur le réseau de droite de la FIG. 2.105 qui correspond aux trois inéquations contradictoires suivantes :



FIGURE 2.105 – Solution de l’Exemple 2 de l’Exercice 237(b).

$$\begin{array}{r}
 x_1 - x_3 \leq 4 \\
 x_2 - x_1 \leq -8 \\
 x_3 - x_2 \leq 3 \\
 \hline
 0 \leq -1
 \end{array}$$

□

2.13 Ordonnancement

Dans cette partie nous allons nous intéresser à une application bien connue de la recherche des chemins optimaux dans un réseau, fréquemment utilisée pour la planification de projets complexes.

2.13.1 Ordonnancement simple

Plus précisément, on considère un projet constitué d’un ensemble de n tâches indivisibles T_1, \dots, T_n . Pour chacune des tâches T_i , on connaît $d_i > 0$, sa durée d’exécution en nombre de jours de travail. De plus, pour un ensemble donné B de couples (j, k) , on a les **contraintes de précé-**

dicence suivantes : la tâche T_j doit être terminée avant que T_k puisse être commencée. On dira alors que T_j est une **tâche requise pour** T_k . Une **réalisation** du projet est un calendrier de début d’exécution pour chacune des tâches, $\text{début}(\cdot)$, qui respecte les contraintes de précé-

dicence, c’est-à-dire

$$\text{début}(T_k) \geq \text{début}(T_j) + d_j \text{ pour tout } (j, k) \in B. \tag{2.54}$$

L’objectif est de trouver une réalisation du projet qui minimise la durée totale d’exécution. Le problème tel que nous l’avons décrit est appelé problème d’**ordonnancement simple**.

Etant donné le projet d’un problème d’ordonnancement simple à n tâches, on ajoutera toujours deux tâches supplémentaires fictives de durée 0 :

- T_0 , qui correspond à la tâche "début du projet", permet d’exprimer la contrainte qu’aucune tâche du projet initial ne peut commencer avant le début du projet. Pour cela il suffit de rajouter les contraintes de précé-
- dicence suivantes : pour chaque tâche T_i ($1 \leq i \leq n$) sans tâche requise, T_0 est requise pour T_i .
- T_{n+1} , qui correspond à la tâche "fin du projet", permet d’exprimer la contrainte que la fin du projet ne se produit que si toutes les tâches du projet initial ont été exécutées. Pour cela il suffit de rajouter les contraintes de précé-
- dicence suivantes : pour chaque tâche T_i ($1 \leq i \leq n$) qui n’est requise pour aucune tâche, T_i est requise pour T_{n+1} .

Par convention, on supposera toujours que le projet commence à la date 0, et se termine dès que toutes les tâches du projet initial ont été exécutées, c’est-à-dire

$$\begin{array}{l}
 \text{début}(T_0) \quad := \quad 0, \\
 \text{début}(T_{n+1}) \quad := \quad \text{date de la fin du projet.}
 \end{array}$$

Il peut exister différentes réalisations du projet qui sont de durée minimum, c'est-à-dire que, pour une tâche T_i , $\text{début}(T_i)$ peut éventuellement prendre plusieurs valeurs selon la réalisation. On s'intéresse aux valeurs extrêmes de $\text{début}(T_i)$. Pour cette raisons nous introduisons les notions suivantes :

- La **date au plus tôt de T_i** , notée $\mathbf{p}(T_i)$, est la première date à laquelle on peut commencer l'exécution de T_i dans une réalisation du projet.
- La **date au plus tard de T_i** , notée $\mathbf{P}(T_i)$, est la dernière date à laquelle on peut commencer la tâche T_i dans une réalisation du projet de durée totale minimum.

Remarque 101 Remarquons que la date au plus tôt de la tâche T_{n+1} correspond à la durée totale minimum d'une réalisation du projet initial.

Pour modéliser le projet on introduit le **réseau potentiel-tâches** (G, ℓ) défini comme suit :

- les sommets de G sont $T_0, T_1, \dots, T_n, T_{n+1}$;
- pour tout couple (i, j) de contrainte de précédence, on a un arc $T_i T_j$ dans G et $\ell(T_i T_j) = d_i$.

Exercice 238 On considère un problème d'ordonnancement simple comportant 5 tâches. Dans la FIG. 2.106, on donne, pour chacune des tâches, sa durée et la liste des tâches requises. Donner le réseau potentiel-tâches associé.

Tâches	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
Durée	10	2	5	3	6
Tâches requises	—	—	T_1, T_2, T_4	—	T_1

FIGURE 2.106 – Description du projet de l'Exercice 238.

Solution Le réseau potentiel-tâches du projet de l'Exercice 238 est représenté FIG. 2.107.

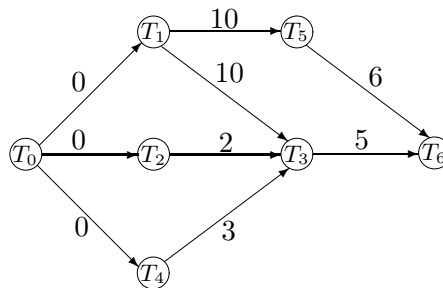


FIGURE 2.107 – Réseau potentiel-tâches du projet de l'Exercice 238.

□

Remarque 102 Par définition, une réalisation du projet est un calendrier de début d'exécution pour chacune des tâches, $\text{début}(\cdot)$, qui respecte (2.54). Par construction du réseau (G, ℓ) du projet, (2.54) est équivalent à

$$\text{début}(T_k) - \text{début}(T_j) \geq \ell(T_j T_k) \quad \text{pour tout } T_j T_k \in A(G). \tag{2.55}$$

Exercice 239 Soit (G, ℓ) le réseau potentiel-tâches d'un projet d'ordonnancement simple qui est réalisable. Montrer que, pour toute réalisation du projet et tout (T_j, T_k) -chemin P dans G , on a

$$\text{début}(T_k) - \text{début}(T_j) \geq \ell(P).$$

Solution Soit P un (T_j, T_k) -chemin dans G . Par la Remarque 102, tous les arcs de P satisfont l'inégalité (2.55). Similairement à la solution de l'Exercice 203, en faisant la somme de ces inégalités, on obtient que $\text{début}(T_k) - \text{début}(T_j) \geq \ell(P)$. \square

Exercice 240 Soit (G, ℓ) le réseau potentiel-tâches d'un projet d'ordonnancement simple à n tâches qui est réalisable. Montrer que dans G

- (a) aucun arc n'entre en T_0 et aucun arc ne sort de T_{n+1} ,
- (b) les degrés entrant et sortant de T_i sont strictement positifs pour tout $1 \leq i \leq n$,
- (c) il n'y a pas de circuit,
- (d) le degré sortant de T_0 et le degré entrant de T_{n+1} sont strictement positifs,
- (e) le sommet T_0 est une racine,
- (f) le sommet T_{n+1} est une anti-racine.

Solution (a) Puisqu'aucune tâche n'est requise pour T_0 et T_{n+1} n'est requise pour aucune tâche, par construction de G , on sait que $d_G^-(T_0) = 0 = d_G^+(T_{n+1})$.

(b) Par définition de T_0 , chaque tâche T_i ($1 \leq i \leq n$) a au moins une tâche requise et ainsi par construction de G , T_i a au moins un arc entrant dans G . De même, par définition de T_{n+1} , chaque tâche T_i ($1 \leq i \leq n$) est requise pour au moins une tâche et ainsi par construction de G , T_i a au moins un arc sortant dans G .

(c) Supposons par l'absurde qu'il existe un circuit C dans G . Par (a), ni T_0 ni T_{n+1} n'appartiennent à C . Alors C est un circuit dans $G - \{T_0, T_{n+1}\}$. Soit $T_i T_j$ un arc quelconque de C . Comme $1 \leq i \leq n$, par hypothèse, $d_i > 0$. Puisque C est un chemin de T_i à T_i dans G , par l'Exercice 239 et $\ell \geq 0$, on obtient la contradiction suivante : $0 = \text{début}(T_i) - \text{début}(T_i) \geq \ell(P) \geq \ell(T_i T_j) = d_i > 0$.

(d) Par (c), G et donc tous ses sous-graphes sont sans circuit et alors, par l'Exercice 132, $G - \{T_0, T_{n+1}\}$ contient un sommet T_i sans arc entrant et un sommet T_j sans arc sortant. Alors, par définition de T_0, T_{n+1} et G , les arcs $T_0 T_i$ et $T_j T_{n+1}$ existent dans G et ainsi $d_G^+(T_0) > 0$ et $d_G^-(T_{n+1}) > 0$.

(e) Soit $X \subset V(G)$ tel que $T_0 \in X$. Par (c), G et donc tous ses sous-graphes sont sans circuit et alors, par l'Exercice 132, $G - X$ contient un sommet T_i sans arc entrant. Puisque, par (b) ou (d) (selon que $i \neq n + 1$ ou non), on a $d_G^-(T_i) > 0$, il existe dans G un arc d'un sommet de X à T_i et ainsi $d_G^+(X) > 0$. En conséquence, par l'Exercice 151, G possède une T_0 -arborescence couvrante et ainsi, par définition d'une arborescence, T_0 est une racine de G .

(f) Soit $\emptyset \neq X \subset V(G)$ tel que $T_{n+1} \notin X$. Par (c), G et donc tous ses sous-graphes sont sans circuit et alors, par l'Exercice 132, $G[X]$ contient un sommet T_i sans arc sortant. Puisque, par (b) ou (d) (selon que $i \neq 0$ ou non), on a $d_G^+(T_i) > 0$, il existe dans G un arc de T_i à un sommet de $V(G) \setminus X$ et ainsi $d_G^-(X) > 0$. En conséquence, par la Remarque 62, G possède une T_{n+1} -anti-arborescence couvrante et ainsi, par définition d'une anti-arborescence, T_{n+1} est une anti-racine de G . \square

Exercice 241 Soit (G, ℓ) le réseau potentiel-tâches d'un projet d'ordonnancement simple à n tâches qui est réalisable. Montrer que, pour toute réalisation du projet qui commence à la date 0 et qui se termine à la date D et pour tout sommet T_i de G , on a

- (a) $\text{début}(T_i)$ supérieur ou égal à la longueur maximum d'un (T_0, T_i) -chemin dans (G, ℓ) ,
- (b) $\text{début}(T_i)$ inférieur ou égal à D moins la longueur maximum d'un (T_i, T_{n+1}) -chemin dans (G, ℓ) .

Solution Soit T_i un sommet de G .

(a) Par l'Exercice 240(e), il existe au moins un (T_0, T_i) -chemin dans G . Par l'Exercice 240(c), G est sans circuit et ainsi tous les chemins dans G sont élémentaires. Par conséquent, l'ensemble des (T_0, T_i) -chemins dans G est non-vide et de cardinal fini. On en conclut que la longueur maximum d'un (T_0, T_i) -chemin dans (G, ℓ) est bien définie. Soit P un (T_0, T_i) -chemin de longueur maximum dans G . Puisque $\text{début}(T_0) = 0$, on a, par l'Exercice 239,

$$\text{début}(T_i) = \text{début}(T_i) - \text{début}(T_0) \geq \ell(P).$$

(b) Similairement, par l'Exercice 240(c) et (f), la longueur maximum d'un (T_i, T_{n+1}) -chemin dans (G, ℓ) est bien définie. Soit P un (T_i, T_{n+1}) -chemin de longueur maximum dans G . Puisque $\text{début}(T_{n+1}) = D$, on a, par l'Exercice 239,

$$\text{début}(T_i) \leq \text{début}(T_{n+1}) - \ell(P) = D - \ell(P). \quad \square$$

Suite à l'Exercice 241 on note pour tout i compris entre 0 et $n + 1$:

- $t(T_i)$ la longueur maximum d'un chemin de T_0 à T_i dans (G, ℓ) ,
- $t'(T_i)$ la longueur maximum d'un chemin de T_i à T_{n+1} dans (G, ℓ) .

Remarque 103 *Puisqu'un plus long (T_j, T_k) -chemin P dans (G, ℓ) est un plus court (T_j, T_k) -chemin dans $(G, -\ell)$, on a $\ell(P) = -(-\ell(P)) = -\mathfrak{d}_{(G, -\ell)}(T_j, T_k)$. En particulier, pour tout i compris entre 0 et $n + 1$, on a*

- $t(T_i) = -\mathfrak{d}_{(G, -\ell)}(T_0, T_i)$ et
- $t'(T_i) = -\mathfrak{d}_{(G, -\ell)}(T_i, T_{n+1})$.

Exercice 242 *Etant donné un problème d'ordonnancement simple à n tâches et $0 \leq i \leq n + 1$, montrer que*

(a) *on obtient une réalisation du projet en posant*

$$\text{début}(T_j) := t(T_j) \text{ pour tout } 0 \leq j \leq n + 1, \quad (2.56)$$

(b) $p(T_i) = t(T_i)$,

(c) *on obtient une réalisation du projet en posant*

$$\text{début}(T_j) := t(T_{n+1}) - t'(T_j) \text{ pour tout } 0 \leq j \leq n + 1, \quad (2.57)$$

(d) $P(T_i) = t(T_{n+1}) - t'(T_i)$.

Solution (a) Considérons le calendrier défini par (2.56). On note que $\text{début}(T_0) = t(T_0) = 0$. Par la Remarque 103, l'Exercice 201, on a pour tout arc $T_j T_k$ de G ,

$$\begin{aligned} \text{début}(T_k) - \text{début}(T_j) &= t(T_k) - t(T_j) \\ &= -\mathfrak{d}_{(G, -\ell)}(T_0, T_k) - (-\mathfrak{d}_{(G, -\ell)}(T_0, T_j)) \\ &\geq \ell(T_j T_k), \end{aligned}$$

c'est-à-dire que, (2.55) est vérifiée et donc, par la Remarque 102, ce calendrier est une réalisation du projet.

(b) Considérons une réalisation du projet pour laquelle la tâche T_i commence au plus tôt, c'est-à-dire $\text{début}(T_i) = p(T_i)$. Par l'Exercice 241, on a $p(T_i) = \text{début}(T_i) \geq t(T_i)$. Par (a), il existe une réalisation du projet pour laquelle $\text{début}(T_i) = t(T_i)$ et ainsi (b) est bien vérifié.

(c) Considérons le calendrier défini par (2.57). Par la Remarque 103, l'Exercice 201 appliqué au réseau (G', ℓ') opposé de (G, ℓ) sur $A(G)$ et au sommet T_{n+1} , on a pour tout arc $T_j T_k$ de G ,

$$\begin{aligned} \text{début}(T_k) - \text{début}(T_j) &= t'(T_j) - t'(T_k) \\ &= -\mathfrak{d}_{(G, -\ell)}(T_j, T_{n+1}) - (-\mathfrak{d}_{(G, -\ell)}(T_k, T_{n+1})) \\ &= -\mathfrak{d}_{(G', \ell')}(T_{n+1}, T_j) - (-\mathfrak{d}_{(G', \ell')}(T_{n+1}, T_k)) \\ &\geq -\ell'(T_k T_j), \\ &= \ell(T_j T_k), \end{aligned}$$

c'est-à-dire que, (2.55) est vérifiée et donc, par la Remarque 102, le calendrier défini en (2.57) est une réalisation du projet. De plus, par définition, $t(T_{n+1})$ et $t'(T_0)$ sont égaux chacun à la longueur maximum d'un (T_0, T_{n+1}) -chemin dans (G, ℓ) ; ainsi $\text{début}(T_0) = t(T_{n+1}) - t'(T_0) = 0$. Ensuite, puisque $t'(T_{n+1}) = 0$, on a $\text{début}(T_{n+1}) = t(T_{n+1}) - t'(T_{n+1}) = t(T_{n+1})$, c'est-à-dire, cette réalisation est de durée minimum.

(d) Considérons une réalisation du projet de durée totale minimum ($\text{début}(T_{n+1}) = p(T_{n+1})$) pour laquelle la tâche T_i commence au plus tard, c'est-à-dire $\text{début}(T_i) = P(T_i)$. Alors, par l'Exercice 241 et (b), on a

$$P(T_i) = \text{début}(T_i) \leq \text{début}(T_{n+1}) - t'(T_i) = p(T_{n+1}) - t'(T_i) = t(T_{n+1}) - t'(T_i).$$

Par (c), il existe une réalisation du projet pour laquelle $\text{début}(T_i) = t(T_{n+1}) - t'(T_i)$ et ainsi (d) est bien vérifié. \square

Remarque 104 Par l'Exercice 242(a) et (b), pour tout problème d'ordonnancement simple il existe une réalisation du projet telle que chaque tâche commence à sa date au plus tôt; cette réalisation est donc de durée minimum. De même, par l'Exercice 242(c) et (d), pour tout problème d'ordonnancement simple il existe une réalisation du projet de durée minimum telle que chaque tâche commence à sa date au plus tard.

Remarque 105 L'exercice 242 peut être démontré en utilisant le Théorème de Duffin.

Remarque 106 Pour calculer la date au plus tôt $p(T_i)$ de chacune des tâches T_i d'un problème d'ordonnancement simple, il suffit, par l'Exercice 242, les Remarques 240 et 97, d'appliquer l'algorithme de Bellman, avec \min remplacé par \max , au réseau potentiel-tâches et au sommet T_0 .

Remarque 107 Pour calculer la date au plus tard $P(T_i)$ de chacune des tâches T_i d'un problème d'ordonnancement simple à n tâches, il suffit, par l'Exercice 242, les Remarques 240 et 97, d'appliquer l'algorithme de Bellman avec \min remplacé par \max au réseau obtenu à partir du réseau potentiel-tâches en inversant le sens des arcs tout en conservant leur longueur et au sommet T_{n+1} pour obtenir $t'(T_i)$ et soustraire ce nombre de $t(T_{n+1})$.

Etant donné le projet d'un problème d'ordonnancement simple à n tâches de réseau potentiel-tâches (G, ℓ) , on dit qu'une tâche T_i est **critique** si $p(T_i) = P(T_i)$, c'est-à-dire que tout retard pour le début de l'exécution de cette tâche entraîne une durée du projet supérieure à la durée minimum. Un plus long (T_0, T_{n+1}) -chemin de (G, ℓ) s'appelle **chemin critique**.

Exercice 243 Montrer que, dans un réseau potentiel-tâches, chaque tâche d'un chemin critique est critique.

Solution Soient Q un chemin critique et T_i un sommet de Q . Par l'Exercice 198 appliqué à $(G, -\ell)$, $Q[T_0, T_i]$ est un plus long (T_0, T_i) -chemin et $Q[T_i, T_{n+1}]$ est un plus long (T_i, T_{n+1}) -chemin dans (G, ℓ) . Ainsi, par l'Exercice 242,

$$p(T_i) = t(T_i) = \ell(Q[T_0, T_i]) = \ell(Q) - \ell(Q[T_i, T_{n+1}]) = t(T_{n+1}) - t'(T_i) = P(T_i).$$

La tâche T_i est donc critique. □

Remarque 108 Par l'Exercice 243, les tâches T_0 et T_{n+1} sont toujours critiques, ce qui doit bien évidemment être le cas.

Exercice 244 Montrer que, dans un réseau potentiel-tâches (G, ℓ) , un arc $T_i T_j$ appartient à un chemin critique si et seulement si T_i et T_j sont critiques et $p(T_j) - p(T_i) = \ell(T_i T_j)$.

Solution Montrons tout d'abord que la condition est nécessaire. Soient donc Q un chemin critique de (G, ℓ) et $T_i T_j$ un arc de Q . Par l'Exercice 243, T_i et T_j sont critiques. Par l'Exercice 198 appliqué à $(G, -\ell)$, $Q[T_0, T_i]$ est un plus long (T_0, T_i) -chemin et $Q[T_0, T_j]$ est un plus long (T_0, T_j) -chemin dans (G, ℓ) . Ainsi, par l'Exercice 242, on a

$$p(T_j) - p(T_i) = t(T_j) - t(T_i) = \ell(Q[T_0, T_j]) - \ell(Q[T_0, T_i]) = \ell(T_i T_j),$$

l'égalité voulue est bien démontrée.

Montrons maintenant que la condition est suffisante. Soient donc T_i et T_j deux tâches critiques telles que $T_i T_j \in A(G)$ et $p(T_j) - p(T_i) = \ell(T_i T_j)$. Par l'Exercice 242(a), $p(T_i) = t(T_i)$, il existe donc un (T_0, T_i) -chemin Q_i dans G tel que $\ell(Q_i) = t(T_i) = p(T_i)$. Puisque T_j est critique et par l'Exercice 242(b), on a $p(T_j) = P(T_j) = t(T_{n+1}) - t'(T_j)$, il existe donc un (T_j, T_{n+1}) -chemin Q_j dans G tel que $\ell(Q_j) = t'(T_j) = t(T_{n+1}) - p(T_j)$. Soit $Q := Q_i + T_i T_j + Q_j$. Par définition, Q est un (T_0, T_{n+1}) -chemin dans G et par ce qui précède, on a

$$\ell(Q) = \ell(Q_i) + \ell(T_i T_j) + \ell(Q_j) = p(T_i) + \ell(T_i T_j) + t(T_{n+1}) - p(T_j) = t(T_{n+1}),$$

d'où on conclut que Q est un chemin critique qui contient l'arc $T_i T_j$. □

Exercice 245 On considère le problème d'ordonnement simple de l'Exercice 238.

- (a) Quelle est la durée minimum de réalisation du projet ?
 (b) Donner la liste des tâches critiques et des chemins critiques.

Solution (a) En utilisant la méthode décrite dans la Remarque 106 et, par l'Exercice 242(a), on trouve que

$$\begin{array}{ll} p(T_0) = t(T_0) = 0, & p(T_5) = t(T_5) = 10, \\ p(T_1) = t(T_1) = 0, & p(T_3) = t(T_3) = 10, \\ p(T_2) = t(T_2) = 0, & p(T_6) = t(T_6) = 16, \\ p(T_4) = t(T_4) = 0, & \end{array}$$

La ℓ -longueur maximum d'un chemin de T_0 à T_6 est 16, donc, par la Remarque 101, la durée minimum de réalisation du projet est 16.

(b) En utilisant la méthode décrite dans la Remarque 107 et, par l'Exercice 242(b), on trouve que

$$\begin{aligned}
 t'(T_6) &= 0, & P(T_6) &= p(T_6) - t'(T_6) = 16 - 0 = 16, \\
 t'(T_3) &= 5, & P(T_3) &= p(T_6) - t'(T_3) = 16 - 5 = 11, \\
 t'(T_5) &= 6, & P(T_5) &= p(T_6) - t'(T_5) = 16 - 6 = 10, \\
 t'(T_4) &= 8, & P(T_4) &= p(T_6) - t'(T_4) = 16 - 8 = 8, \\
 t'(T_2) &= 7, & P(T_2) &= p(T_6) - t'(T_2) = 16 - 7 = 9, \\
 t'(T_1) &= 16, & P(T_1) &= p(T_6) - t'(T_1) = 16 - 16 = 0, \\
 t'(T_0) &= 16, & P(T_0) &= p(T_6) - t'(T_0) = 16 - 16 = 0.
 \end{aligned}$$

Les tâches critiques sont celles pour lesquelles $p(T_i) = P(T_i)$, donc les tâches T_0, T_1, T_5 et T_6 . Il y a un seul chemin critique T_0, T_1, T_5, T_6 . □

Exercice 246 On considère un problème d'ordonnancement simple comportant 9 tâches. Dans la FIG. 2.108, on donne, pour chacune des tâches, sa durée et la liste des tâches requises.

Tâches	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9
Durée	8	9	10	8	6	7	5	6	7
Tâches requises	—	—	—	T_1, T_2, T_3	T_2, T_3	T_3	T_4	T_4, T_5, T_6	T_6

FIGURE 2.108 – Description du projet de l'Exercice 246.

- (a) Donner le réseau potentiel-tâches associé.
- (b) Quelle est la durée minimum de réalisation du projet ?
- (c) Donner la liste des tâches critiques et des chemins critiques.
- (d) On a la possibilité de réduire la durée d'une et une seule tâche. Est-il possible de réduire ainsi la durée totale du projet ? Quelle tâche faudrait-il choisir et de combien la durée totale peut-elle être diminuée ?

Solution (a) Le réseau potentiel-tâches du projet de l'Exercice 246 est représenté FIG. 2.109.

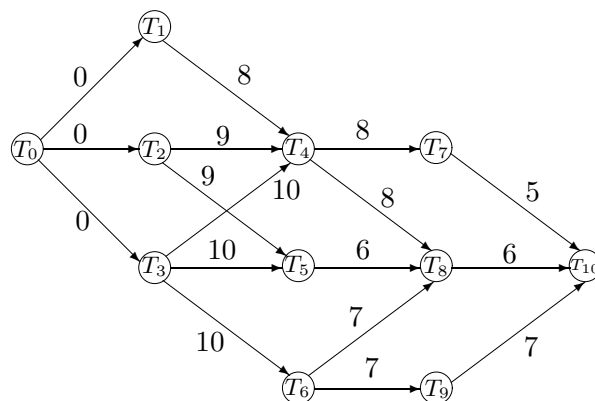


FIGURE 2.109 – Réseau potentiel-tâches du projet de l'Exercice 246.

(b) En utilisant la méthode décrite dans la Remarque 106 et, par l'Exercice 242(a), on trouve que

$$\begin{array}{ll}
p(T_0) = t(T_0) = 0, & p(T_6) = t(T_6) = 10, \\
p(T_1) = t(T_1) = 0, & p(T_7) = t(T_7) = 18, \\
p(T_2) = t(T_2) = 0, & p(T_8) = t(T_8) = 18, \\
p(T_3) = t(T_3) = 0, & p(T_9) = t(T_9) = 17, \\
p(T_4) = t(T_4) = 10, & p(T_{10}) = t(T_{10}) = 24, \\
p(T_5) = t(T_5) = 10, &
\end{array}$$

La longueur maximum d'un chemin de T_0 à T_{10} est 24, donc, par la Remarque 101, la durée minimum de réalisation du projet est 24.

(c) En utilisant la méthode décrite dans la Remarque 107 et, par l'Exercice 242(b), on trouve que

$$\begin{array}{ll}
t'(T_{10}) = 0, & P(T_{10}) = p(T_{10}) - t'(T_{10}) = 24 - 24 = 0, \\
t'(T_9) = 7, & P(T_9) = p(T_{10}) - t'(T_9) = 24 - 7 = 17, \\
t'(T_8) = 6, & P(T_8) = p(T_{10}) - t'(T_8) = 24 - 6 = 18, \\
t'(T_7) = 5, & P(T_7) = p(T_{10}) - t'(T_7) = 24 - 5 = 19, \\
t'(T_6) = 14, & P(T_6) = p(T_{10}) - t'(T_6) = 24 - 14 = 10, \\
t'(T_5) = 12, & P(T_5) = p(T_{10}) - t'(T_5) = 24 - 12 = 12, \\
t'(T_4) = 14, & P(T_4) = p(T_{10}) - t'(T_4) = 24 - 14 = 10, \\
t'(T_3) = 24, & P(T_3) = p(T_{10}) - t'(T_3) = 24 - 24 = 0, \\
t'(T_2) = 23, & P(T_2) = p(T_{10}) - t'(T_2) = 24 - 23 = 1, \\
t'(T_1) = 18, & P(T_1) = p(T_{10}) - t'(T_1) = 24 - 18 = 6, \\
t'(T_0) = 24, & P(T_0) = p(T_{10}) - t'(T_0) = 24 - 24 = 0.
\end{array}$$

Les tâches critiques sont celles pour lesquelles $p(T_i) = P(T_i)$, donc les tâches $T_0, T_3, T_4, T_6, T_8, T_9$ et T_{10} . Par l'Exercice 244, il y a deux chemins critiques $T_0, T_3, T_4, T_8, T_{10}$ et $T_0, T_3, T_6, T_9, T_{10}$. Notons que le chemin $T_0, T_3, T_6, T_8, T_{10}$ n'est pas critique bien que tous ses sommets soient critiques. En effet, sa ℓ -longueur est égale à $23 < 24 = t(T_{10})$.

(d) Pour réduire la durée totale du projet il faut prendre une tâche T_i ($0 < i < 10$) qui appartient à tous les chemins critiques. Par (c), il y a deux chemins critiques $T_0, T_3, T_4, T_8, T_{10}$ et $T_0, T_3, T_6, T_9, T_{10}$. En dehors de leurs extrémités, ces chemins ont une seule tâche en commun, à savoir T_3 . En diminuant la durée de la tâche T_3 , on ne peut pas diminuer la durée totale du projet de plus d'un jour, en raison du chemin $T_0, T_2, T_4, T_8, T_{10}$ de ℓ -longueur égale à 23. \square

2.13.2 Ordonnancement étendu

Le problème d'ordonnancement simple est un cas particulier d'un problème plus général qu'on appellera **ordonnancement étendu**. On dispose d'un ensemble de tâches indivisibles T_1, \dots, T_n . Pour chacune des tâches T_i ($1 \leq i \leq n$), on connaît $d_i > 0$, sa durée d'exécution en nombre de jours. L'objectif est de réaliser toutes les tâches du projet dans une durée minimum en respectant des contraintes qui sont toutes du type : T_k ne peut commencer qu'après le début de T_j plus une valeur entière d_{jk} , c'est-à-dire

$$\text{début}(T_k) \geq \text{début}(T_j) + d_{jk}. \quad (2.58)$$

Remarquons que cette valeur d_{jk} n'est pas nécessairement positive et que les contraintes de précedence sont de ce type avec $d_{jk} = d_j$. Si $d_{jk} \geq d_j$ on dira que T_j est une **tâche requise étendue pour T_k** . Pour donner un exemple, le fait que T_2 doit commencer au plus tard 8 jours après le début de T_1 peut être formulé comme $\text{début}(T_2) \leq \text{début}(T_1) + 8$ qui correspond à une contrainte de type (2.58) : $\text{début}(T_1) \geq \text{début}(T_2) - 8$.

De même que pour l'ordonnancement simple, on rajoute deux tâches supplémentaires fictives T_0 et T_{n+1} de durées 0 et on ajoute à l'ensemble des contraintes les contraintes de précédence suivantes : pour chaque tâche T_i ($1 \leq i \leq n$),

- si T_i est sans tâche requise étendue, T_0 est requise pour T_i ,
- si T_i n'est requise étendue pour aucune tâche, T_i est requise pour T_{n+1} .

Comme avant, on définit les dates au plus tôt, les dates au plus tard et les tâches critiques d'un projet de problème d'ordonnancement étendu, sachant que toute réalisation du projet doit satisfaire toutes les contraintes et pas seulement les contraintes de précédence.

À un problème d'ordonnancement étendu à n tâches on peut aussi associer le **réseau potentiel-tâches** (G, ℓ) défini ci-dessous. Le graphe orienté G a $n + 2$ sommets $T_0, T_1, \dots, T_n, T_{n+1}$. Pour chaque couple (i, j) de contrainte, on a un arc $T_i T_j$ dans G et $\ell(T_i T_j) = d_{ij}$.

Remarque 109 *Contrairement au problème d'ordonnancement simple, le réseau potentiel-tâches (G, ℓ) du projet d'un problème d'ordonnancement étendu réalisable peut contenir des circuits, à condition que ceux-ci ne soient pas de ℓ -longueur strictement positive.*

Remarque 110 *Par la Remarque 109, pour un problème d'ordonnancement étendu réalisable la longueur maximum d'un (T_j, T_k) -chemin dans (G, ℓ) est bien définie et donc l'énoncé de l'Exercice 242 reste valide puisqu'on peut utiliser la même solution dans ce cas plus général.*

Remarque 111 *Pour calculer la date au plus tôt $p(T_i)$ de chacune des tâches T_i d'un problème d'ordonnancement étendu ou démontrer que le projet est irréalisable, il suffit, par la Remarque 110, d'appliquer à (G, ℓ) et T_0 l'algorithme de Ford-Fulkerson-Dantzig modifié comme indiqué à la Remarque 99.*

Remarque 112 *Pour calculer la date au plus tard $P(T_i)$ de chacune des tâches T_i d'un problème d'ordonnancement étendu à n tâches, il suffit, par la Remarque 110, d'appliquer l'algorithme de Ford-Fulkerson-Dantzig modifié comme indiqué à la Remarque 99, au réseau obtenu à partir du réseau potentiel-tâches en inversant le sens des arcs tout en conservant leur longueur et au sommet T_{n+1} pour obtenir $t'(T_i)$ et soustraire ce nombre de $t(T_{n+1})$.*

Exercice 247 *On considère un problème d'ordonnancement étendu comportant 6 tâches dont les durées en jours sont données dans la FIG. 2.110.*

Tâches	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
Durée	2	1	6	1	3	3

FIGURE 2.110 – Durées des tâches du projet de l'Exercice 247.

L'exécution de ces tâches est soumise aux contraintes suivantes :

- T_2 doit commencer au plus tôt 4 jours et au plus tard 5 jours après le début des travaux et ne peut commencer que lorsque T_1 est terminée.
- T_3 ne peut commencer que si T_1 est terminée.
- T_4 ne peut commencer que lorsque T_2 et T_5 sont terminées.
- T_5 ne peut commencer que lorsque T_3 est terminée et que si T_2 a débuté depuis au moins 3 jours.
- T_6 doit commencer au plus tôt 3 jours après la fin de T_3 .

(a) Donner le réseau potentiel-tâches du projet.

- (b) Calculer la date au plus tôt et la date au plus tard de chacune des tâches et donner la liste des tâches critiques.
- (c) Que devient le projet si l'on ajoute la contrainte suivante ?
- T_4 doit commencer exactement 4 jours après la fin de T_2 .

Solution (a) Le réseau potentiel-tâches (G, ℓ) du projet de l'Exercice 247 est représenté FIG. 2.111. Nous explicitons ci-dessous les arcs de ce réseau qui ne correspondent pas à des contraintes de précédence. Les contraintes de T_2 par rapport au début des travaux donnent les deux arcs suivants : T_0T_2 de ℓ -longueur 4 et T_2T_0 de ℓ -longueur -5. La contrainte entre T_5 et T_2 donne l'arc T_2T_5 de ℓ -longueur 3. La contrainte de T_6 donne l'arc T_3T_6 de ℓ -longueur $6 + 3 = 9$.

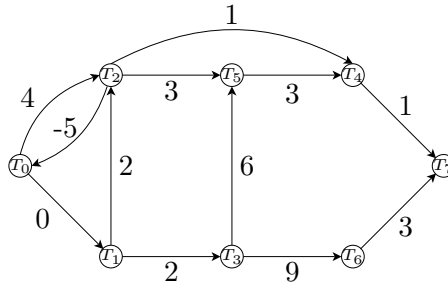


FIGURE 2.111 – Réseau potentiel-tâches du projet de l'Exercice 247.

(b) On utilise la méthode décrite dans la Remarque 111 pour calculer les dates au plus tôt ou montrer que le projet est irréalisable. On applique donc l'algorithme de Ford-Fulkerson-Dantzig modifié comme indiqué à la Remarque 99 au réseau de la FIG. 2.111 et au sommet T_0 . On peut considérer que l'initialisation a fourni l'arborescence F_1 indiquée sur la FIG. 2.112. Les distances $\pi_1(T_i)$ de T_0 à T_i dans F_1 pour chaque sommet T_i de G sont indiquées sur la FIG. 2.112. On vérifie facilement que $\pi_1(T_j) - \pi_1(T_i) \geq \ell(T_iT_j)$ pour tout arc T_iT_j de G . Par la Remarque 103 et l'Exercice 234(c), F_1 est une T_0 -arborescence couvrante de plus longs chemins de (G, ℓ) .

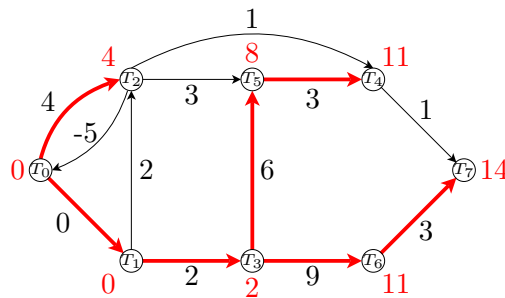


FIGURE 2.112 – T_0 -arborescence couvrante de plus longs chemins du réseau potentiel-tâches du projet de l'Exercice 247.

Ainsi

$$\begin{aligned}
 p(T_0) &= t(T_0) = 0, & p(T_4) &= t(T_4) = 11, \\
 p(T_1) &= t(T_1) = 0, & p(T_5) &= t(T_5) = 8, \\
 p(T_2) &= t(T_2) = 4, & p(T_6) &= t(T_6) = 11, \\
 p(T_3) &= t(T_3) = 2, & p(T_7) &= t(T_7) = 14.
 \end{aligned}$$

La durée minimum de réalisation du projet qui est égale à la longueur maximum d'un chemin de T_0 à T_7 dans (G, ℓ) est donc 14 jours.

On utilise la méthode décrite dans la Remarque 112 pour calculer les dates au plus tard. On applique donc l'algorithme de Ford-Fulkerson-Dantzig modifié comme indiqué à la Remarque 99 au réseau (G', ℓ') obtenu à partir du réseau de la FIG. 2.111 en inversant le sens des arcs tout en conservant leur longueur et au sommet T_{n+1} pour obtenir $t'(T_i)$. On peut considérer que l'initialisation a fourni l'arborescence F'_1 indiquée sur la FIG. 2.113. Les distances $\pi_1(T_i)$ de T_7 à T_i dans F'_1 pour chaque sommet T_i de G' sont indiquées sur la FIG. 2.113. On vérifie facilement que $\pi_1(T_j) - \pi_1(T_i) \geq \ell(T_i T_j)$ pour tout arc $T_i T_j$ de G' . On en conclut que F'_1 est une T_7 -arborescence de plus longs chemins de (G', ℓ') . Ainsi on a calculé $\pi_1(T_i) = \pi(T_i) = t'(T_i)$ pour $i = 0, \dots, 7$. Pour obtenir la date au plus tard $P(T_i)$ il suffit de soustraire ce nombre de $t(T_7) = 14$.

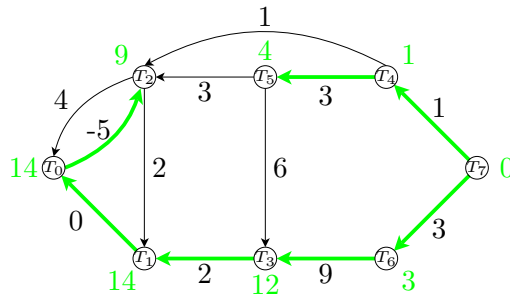


FIGURE 2.113 – T_7 -arborescence de plus longs chemins du réseau (G', ℓ') .

Ainsi

$$\begin{aligned}
 P(T_0) &= 14 - t'(T_0) = 14 - 14 = 0, & P(T_4) &= 14 - t'(T_4) = 14 - 1 = 13, \\
 P(T_1) &= 14 - t'(T_1) = 14 - 14 = 0, & P(T_5) &= 14 - t'(T_5) = 14 - 4 = 10, \\
 P(T_2) &= 14 - t'(T_2) = 14 - 9 = 5, & P(T_6) &= 14 - t'(T_6) = 14 - 3 = 11, \\
 P(T_3) &= 14 - t'(T_3) = 14 - 12 = 2, & P(T_7) &= 14 - t'(T_7) = 14 - 0 = 14.
 \end{aligned}$$

Les tâches critiques sont celles pour lesquelles $p(T_i) = P(T_i)$, donc les tâches T_0, T_1, T_3, T_6 et T_7 .

(c) Puisque l'exécution de T_2 prend 1 jour, la contrainte supplémentaire signifie que

$$\text{début}(T_4) = \text{début}(T_2) + (1 + 4).$$

Ceci s'exprime par deux contraintes d'ordonnancement étendu :

$$\begin{aligned}
 \text{début}(T_4) &\geq \text{début}(T_2) + 5, \\
 \text{début}(T_2) &\geq \text{début}(T_4) - 5.
 \end{aligned}$$

Le réseau potentiel-tâches du projet modifié (représenté FIG. 2.114) est donc obtenu en rajoutant au réseau potentiel-tâches initial de la FIG. 2.111 un arc $T_2 T_4$ de ℓ -longueur 5 et un arc $T_4 T_2$ de ℓ -longueur -5.

On utilise la méthode décrite dans la Remarque 111 pour calculer les dates au plus tôt ou montrer que le projet est irréalisable. On applique donc l'algorithme de Ford-Fulkerson-Dantzig modifié comme indiqué à la Remarque 99 au réseau de la FIG. 2.114 et au sommet T_0 . On peut considérer que l'initialisation a fourni l'arborescence F_1 indiquée sur la FIG. 2.112 qui était l'arborescence optimale pour le projet initial. D'abord, l'algorithme va détecter que l'arc $T_4 T_2$ doit remplacer l'arc $T_0 T_2$ de manière à obtenir l'arborescence indiquée sur le réseau du milieu de la FIG. 2.115. Puis l'algorithme va détecter que l'arc $T_2 T_5$ doit remplacer l'arc $T_3 T_5$ ce qui donne

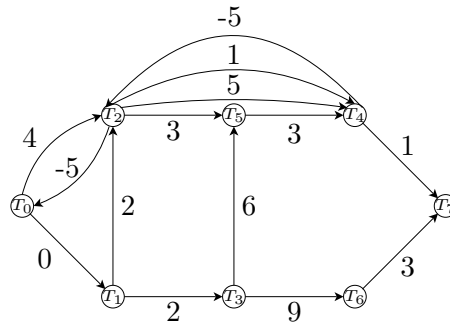


FIGURE 2.114 – Réseau potentiel-tâches du projet de l'Exercice 247(c).

l'ensemble des arcs rouges indiqués sur le réseau de droite de la FIG. 2.115. Alors à l'Etape 4 de l'algorithme de Ford-Fulkerson-Dantzig modifié on obtient le circuit $T_2T_5T_4T_2$ de ℓ -longueur strictement positive. On en conclut que le projet modifié est irréalisable.

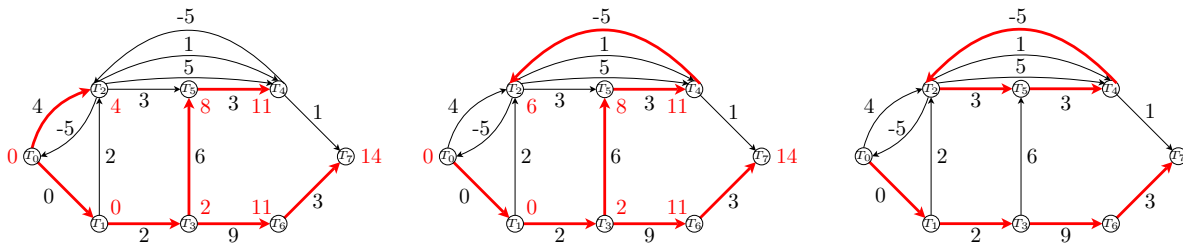


FIGURE 2.115 – Exécution de l'algorithme de Ford-Fulkerson-Dantzig modifié comme indiqué à la Remarque 99 sur le réseau de la FIG. 2.114 et le sommet T_0 , à partir de l'arborescence indiquée en rouge sur le réseau de gauche. Les valeurs indiquées en rouge à côté des sommets correspondent à la distance depuis T_0 dans l'arborescence rouge.

□