Couplage dans les graphes bipartis

Un **couplage** est un sous-ensemble M d'arêtes d'un graphe G tel que deux arêtes de M ne soient pas adjacentes. Un sommet v de G est dit M**-saturé** si v est incident à une arête de M, sinon v est M-insaturé. Une chaîne est dite M**-alternée** si ses arêtes sont alternées en M et en $E(G) \setminus M$. Une chaîne M-alternée reliant deux sommets M-insaturés est dite M**-augmentante**. Un couplage M de G est **parfait** si chaque sommet de G est M-saturé. $\nu(G)$ est le cardinal maximum d'un couplage de G. Un ensemble T des sommets de G est **transversal** si T contient au moins une des deux extrémités de chaque arête. $\tau(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble transversal de G. $\Gamma(X)$ note l'ensemble des **voisins** d'un ensemble X de sommets.

Exercice 6.1. — Théorème de Berge : Montrer qu'un couplage M est de cardinal maximum si et seulement s'il n'existe pas de chaîne M-augmentante.

Exercice 6.2. — Théorème de Kőnig : Montrer que dans un graphe biparti G, le cardinal maximum d'un couplage est égal au cardinal minimum d'un ensemble transversal, c'est-à-dire

$$\nu(G) = \tau(G). \tag{1}$$

Exercice 6.3. — Théorème de Hall : Montrer qu'un graphe biparti $G = (U, V; E)$ possède un couplage parfait si et seulement si

$$|U| = |V|, \tag{2}$$

$$|\Gamma(X)| \geq |X| \quad \forall X \subseteq U. \tag{3}$$

Exercice 6.4. — Montrer que le problème du *couplage* de **coût maximum** dans un graphe biparti avec *coût quelconque* se ramène à celui du *couplage parfait* de **coût minimum** dans un graphe biparti ayant un couplage parfait avec *coût non-négatif.*

Exercice 6.5. — Soit A la matrice d'incidence d'un graphe biparti. Montrer que le déterminant de chaque sous-matrice carrée de A est $0, 1$ ou -1.

Exercice 6.6. — Théorème de Egerváry : Soient $G = (U, V; E)$ un graphe biparti ayant un couplage parfait et c un coût sur les arêtes de G.

(a) Montrer que si $\overline{x}$ est une solution optimale du programme linéaire (4) qui est intégrale

$$\min\{c^T x : Ax = \mathbf{1},\ x \geq 0\} \tag{4}$$

alors $\overline{x}$ est le vecteur caractéristique d'un couplage parfait de G de coût minimum.

(b) Montrer que le dual de (4) est le programme linéaire suivant :

$$\max\{\mathbf{1}^T y : y(u) + y(v) \leq c(uv)\}. \tag{5}$$

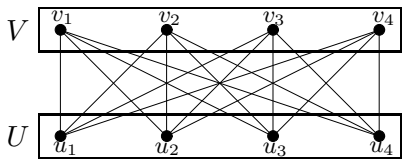
(c) Montrer que le coût minimum d'un couplage parfait de G est égal à la valeur optimale du (5).

Exercice 6.7. — (**Justification de l'algorithme méthode hongroise**)

Algorithme méthode hongroise :
Entrée : $G = (U, V; E)$ un graphe biparti qui admet un couplage parfait et c un coût non-négatif sur les arêtes de G.
Sortie : Un couplage parfait de G de coût minimum.
Etape 0. *Initialisation.*
$M_0 := \emptyset$,
$$y_1(w) := \begin{cases} \min\{c(wv) : wv \in E\} & \text{si } w \in U, \\ 0 & \text{si } w \in V, \end{cases}$$
$i := 1$.
Etape 1. *Construction du graphe G_i des arêtes serrées.*
$G_i := (U, V; E_i)$ où $E_i = \{uv \in E : y_i(u) + y_i(v) = c(uv)\}$.
Etape 2. *Construction d'un couplage maximum et d'un transversal minimum dans G_i.*
En partant de M_{i-1} et en utilisant les flots, trouver un couplage M_i de G_i de cardinal maximum et un ensemble transversal T_i de G_i de cardinal minimum.
Etape 3. *Condition d'arrêt.*
Si M_i est un couplage parfait de G_i, alors arrêter avec M_i.
Etape 4. *Construction des partitions de U et V.*
$U_i^1 :=$ les sommets M_i-insaturés dans U, $U_i^2 := U \setminus (T_i \cup U_i^1)$, $U_i^3 := U \setminus (U_i^1 \cup U_i^2)$,
$V_i^1 :=$ les sommets M_i-insaturés dans V, $V_i^2 := V \cap T_i$, $V_i^3 := V \setminus (V_i^1 \cup V_i^2)$.
Etape 5. *Changement de solution du dual.*
$\varepsilon_i := \min\{c(uv) - y_i(u) - y_i(v) : u \in U \setminus T_i = U_i^1 \cup U_i^2, v \in V \setminus T_i = V_i^1 \cup V_i^3, uv \in E\}$
$$y_{i+1}(w) := \begin{cases} y_i(w) + \varepsilon_i & \text{si } w \in U \setminus T_i = U_i^1 \cup U_i^2, \\ y_i(w) - \varepsilon_i & \text{si } w \in V \cap T_i = V_i^2, \\ y_i(w) & \text{sinon.} \end{cases}$$
$i := i + 1$.
Aller à l'Etape 1.

(a) Montrer que pour tout i, y_i est une solution réalisable du (5).
(b) Montrer que $M_{i-1} \subseteq E_i$ et qu'une arête uv de G ($u \in U_i^1 \cup U_i^2, v \in V_i^1 \cup V_i^3$) devient y_i-serrée.
(c) Montrer qu'après chaque exécution de l'Etape 4 soit $|M_i| > |M_{i-1}|$ soit $|U_i^2| > |U_{i-1}^2|$.
(d) Montrer l'algorithme s'arrête en temps polynomial.
(e) Montrer que l'algorithme s'arrête avec un couplage parfait M_i de G de coût minimum.

Exercice 6.8. — Exécuter l'algorithme méthode hongroise pour trouver un couplage parfait de coût minimum dans le graphe biparti suivant.



	u_1	u_2	u_3	u_4
v_1	3	2	1	1
v_2	9	4	1	5
v_3	8	5	2	3
v_4	7	8	4	8

Exercice 6.9. — Un directeur doit affecter ses n employés à n tâches à exécuter. Puisqu'il connait bien ses employés, il sait précisément le profit qu'il peut gagner en affectant l'employé i à la tâche j. Le directeur vous engage pour l'aider à trouver l'affectation de profit maximum. Comment allez-vous modéliser ce problème ?

Exercice 6.10. — On veut trouver les positions exactes de n objets dans l'espace 3-dimensionnel à l'aide de deux détecteurs infrarouges fixés. Chaque détecteur nous fournit n droites sur lesquelles les objets se trouvent. Ces $2n$ droites nous donnent théoriquement les positions exactes des n objets. À cause de problèmes techniques nous avons seulement des droites approximatives. On sait que deux droites correspondant au même objet ont une distance euclidienne très petite. Comment peut-on modéliser ce problème avec les couplages ?