Optimisation Combinatoire 2A
Circulations

Zoltán Szigeti

Ensimag
Grenoble INP

Circulation

Problème

Peut-on faire circuler l'eau dans un système de tuyaux satisfaisant deux contraintes de capacité des tuyaux ?

Modélisation

Graphe orienté G, deux capacités f et g sur chaque arc avec $f(e) \leq g(e)$. décider s'il existe une circulation réalisable.

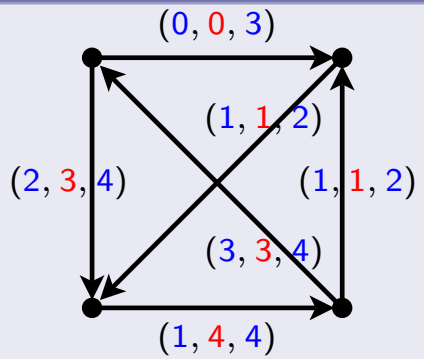
Définitions

Dans un réseau $(G = (V, A), f, g)$, une fonction x sur les arcs est

1. une circulation si elle vérifie la contrainte de conservation du flot : $d_x^+(v) = d_x^-(v)\ \forall v \in V \iff d_x^+(Z) = d_x^-(Z)\ \forall Z \subseteq V$.
2. réalisable si elle satisfait la contrainte de capacités : $f(e) \leq x(e) \leq g(e)\ \forall e \in A$.

Circulation

Exemple



$(f(e), x(e), g(e))$

Lemme (Condition nécessaire pour avoir une circulation réalisable)

Ce qui doit entrer doit pouvoir sortir :

$$d_f^-(Z) \leq d_x^-(Z) = d_x^+(Z) \leq d_g^+(Z) \quad \forall Z \subseteq V.$$

Théorème (Hoffmann)

Il existe une circulation réalisable dans (G, f, g) si et seulement si

$$d_f^-(Z) \leq d_g^+(Z) \quad \forall Z \subseteq V.$$

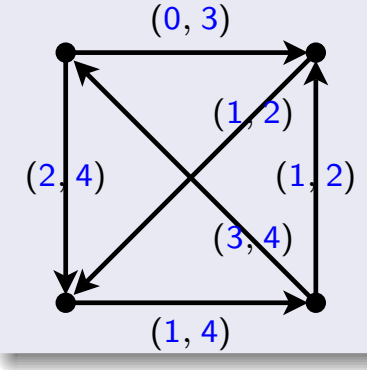
Thm de Ford-Fulkerson implique Thm de Hoffmann

Démonstration (début)

Etant donnés

1. $G = (V, A)$ un graphe orienté,
2. f et g deux fonctions sur les arcs telles que
   1. $f(e) \leq g(e) \quad \forall e \in A$,
   2. $d_f^-(Z) \leq d_g^+(Z) \quad \forall Z \subseteq V$.

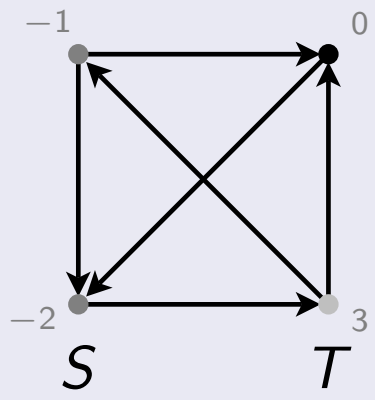
Exemple



Notation

1. $b(v) := d_f^+(v) - d_f^-(v) \ \forall v \in V$,
2. $b(Z) := \sum_{v \in Z} b(v) = d_f^+(Z) - d_f^-(Z) \ \forall Z \subset V$,
3. $S := \{v \in V : b(v) < 0\}$,
4. $T := \{v \in V : b(v) > 0\}$,
5. M :=-$b(S) = b(T)$ $(0 = b(V) = b(S) + b(T))$.

Exemple



Thm de Ford-Fulkerson implique Thm de Hoffmann

Démonstration (commence)

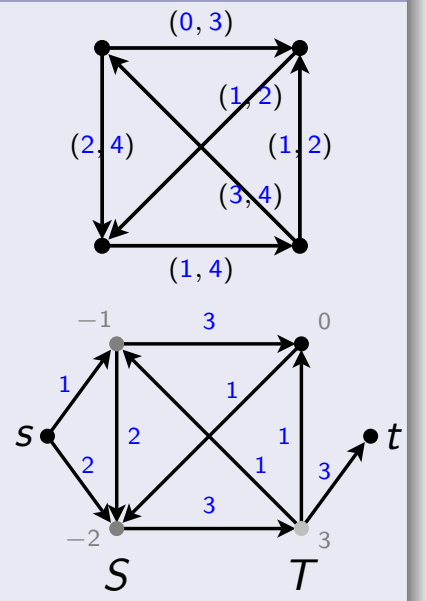
Si $b(v) = 0 \quad \forall v \in V$, alors f est une circulation réalisable de (G, f, g), par définition et par $f \leq g$.

Construction du réseau

$(G' = (V', A'), g')$ où

1. $V' = V \cup \{s, t\}$,
2. $A' = A \cup \{sv : v \in S\} \cup \{vt : v \in T\}$,
3. $$g'(uv) := \begin{cases} -b(v) & \text{si } u = s, v \in S, \\ b(u) & \text{si } u \in T, v = t, \\ g(uv) - f(uv) & \text{si } uv \in A. \end{cases}$$

Exemple

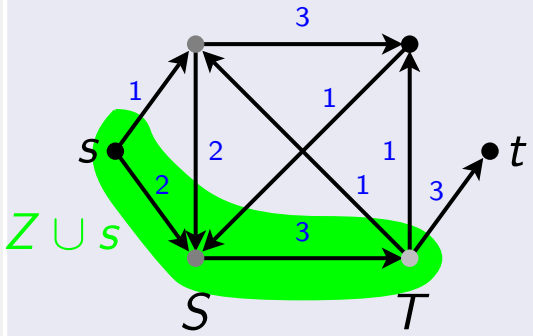


Thm de Ford-Fulkerson implique Thm de Hoffmann

Lemme

1. Il existe un (s,t)-flot réalisable x' de valeur au moins M dans (G',g'). $\Longleftrightarrow$
2. La capacité minimum d'une (s,t)-coupe est au moins M dans (G',g').
   (Par le Théorème de Ford-Fulkerson)

Exemple



Démonstration

$$
\begin{aligned}
cap(Z \cup s) &= \sum_{v \in S \setminus Z} g'(sv) + \sum_{u \in T \cap Z} g'(ut) + \sum_{uv \in \delta_G(Z)} g'(uv) \\
&= \sum_{v \in S \setminus Z} -b(v) + \sum_{u \in T \cap Z} b(u) + \sum_{uv \in \delta_G(Z)} (g-f)(uv) \\
&= -b(S \setminus Z) + b(T \cap Z) + d^+_{g-f}(Z) \\
&= -b(S) + b(S \cap Z) + b(T \cap Z) + b(Z \setminus (S \cup T)) + d^+_{g-f}(Z) \\
&= M + b(Z) + d^+_{g-f}(Z) \\
&= M + (d^+_f(Z) - d^-_f(Z)) + (d^+_g(Z) - d^+_f(Z)) \\
&= M + (d^+_g(Z) - d^-_f(Z)) \geq M + 0 = M.
\end{aligned}
$$

Thm de Ford-Fulkerson implique Thm de Hoffmann

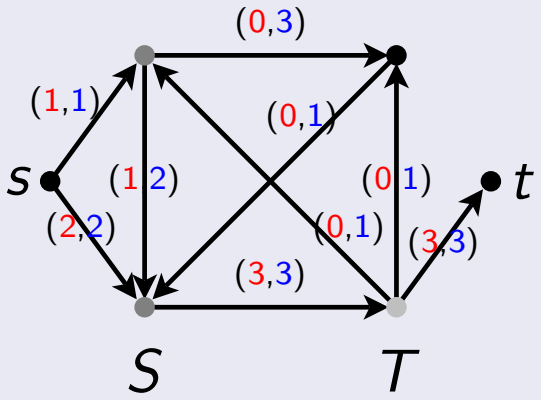
Démonstration (continue)

Tout arc incident à s ou t est saturé ($x'(e) = g'(e)$).

$$M \leq val(x') = d^+_{x'}(s) = \sum_{v \in S} x'(sv) \leq \sum_{v \in S} g'(sv) = \sum_{v \in S} -b(v) = -b(S) = M.$$

$$M \leq val(x') = d^-_{x'}(t) = \sum_{v \in T} x'(vt) \leq \sum_{v \in T} g'(vt) = \sum_{v \in T} \quad b(v) = \quad b(T) = M.$$

Exemple



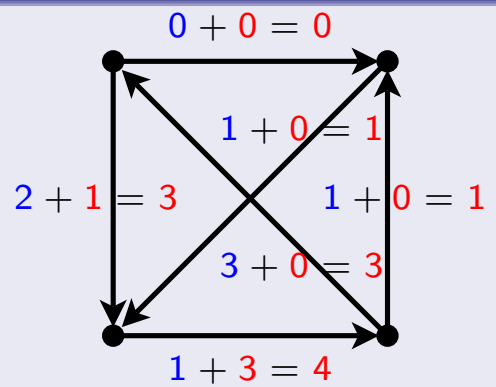
Thm de Ford-Fulkerson implique Thm de Hoffmann

Démonstration (presque la fin)

$x = f + x'_G$ est une circulation dans (G, f, g).

1. $d_f^+(v) - d_f^-(v) = b(v)$,
2. $d^+_{x'_G}(v) - d^-_{x'_G}(v) = d^+_{x'}(v) - d^-_{x'}(v) \begin{cases} = 0 = -b(v) & \text{si } v \notin S \cup T, \\ + x'_{sv} = -b(v) & \text{si } v \in S, \\ - x'_{vt} = -b(v) & \text{si } v \in T. \end{cases}$
3. $d_x^+(v) - d_x^-(v) = d_f^+(v) - d_f^-(v) + d^+_{x'_G}(v) - d^-_{x'_G}(v) = b(v) - b(v) = 0.$

Exemple



$f(e) + x'_G(e) = x(e)$

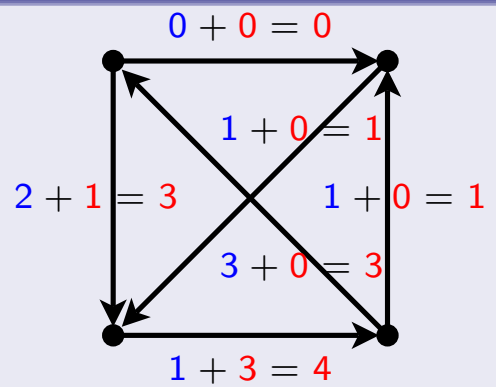
Thm de Ford-Fulkerson implique Thm de Hoffmann

Démonstration (enfin la fin)

$x = f + x'_G$ est réalisable dans (G, f, g).

1. $0 \leq x'(e) \leq g'(e) = g(e) - f(e)$, ($x'$ est réalisable dans (G', g')) $\Longrightarrow$
2. $f(e) \leq (f + x'_G)(e) \leq g(e)\ \forall e \in A$.

Exemple



$f(e) + x'_G(e) = x(e)$

Algorithme

Algorithme

Entrée : (G, f, g) avec $f \leq g$.
Sortie : Une et une seule parmi :

1. une circulation réalisable,
2. une coupe violant la condition de Hoffmann.

1. Si f est une circulation, alors arrêter.
2. Sinon
   1. Construire le réseau (G', g', s, t).
   2. Trouver dans (G', g', s, t) par l'algorithme d'Edmonds-Karp,
      1. un (s, t)-flot réalisable de valeur maximum x' et
      2. une (s, t)-coupe de capacité minimum $Z \cup s$.
   3. Si $val(x') = M$, alors arrêter, $x = f + x'_G$ est une circulation réalisable.
   4. Sinon arrêter, Z viole la condition de Hoffmann.

Exemples en TD.

Circulation entière

Théorème

Si $f(e)$ et $g(e)$ sont entiers pour chaque arc e de G et
s'il existe une circulation réalisable dans (G, f, g), alors
il en existe une, x, telle que $x(e)$ soit entier pour chaque arc e de G.

Démonstration

1. On exécute l'algorithme précédent.
2. Si on s'arrête avec f, alors $f(e)$ est entier $\forall e \in A(G)$.
3. Dans (G', g'), $g'(e) = g(e) - f(e)$ est entier $\forall e \in A(G)$.
4. Par l'algorithme d'Edmonds-Karp, $x'(e)$ est entier $\forall e \in A(G)$.
5. On ne peut pas s'arrêter avec Z qui viole la condition car il existe une circulation réalisable.
6. On s'arrête avec la circulation réalisable $x = f + x'_G$ et $x(e)$ est entier $\forall e \in A(G)$.

Thm de Hoffmann implique Thm de Ford-Fulkerson

Démonstration (début)

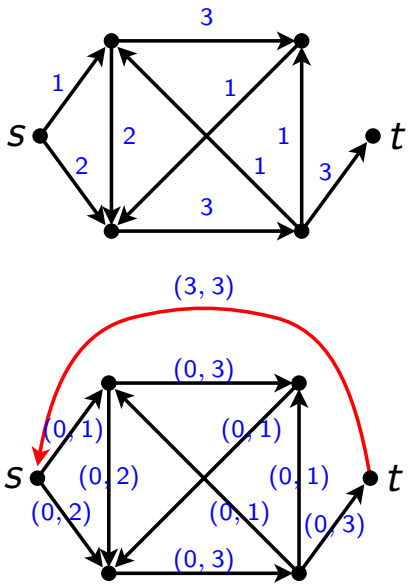
Etant donnés

1. $G = (V, A)$ un graphe orienté,
2. s, t deux sommets de G tels que $d^-(s) = 0 = d^+(t)$,
3. g une fonction non-négative sur les arcs,

$M :=$ la capacité minimum d'une (s, t)-coupe dans (G, g).

Construction du réseau

1. $G' := (V, A \cup \{ts\})$,
2. $(f'(e), g'(e)) := \begin{cases} (0, g(e)) & \text{si } e \in A, \\ (M, M) & \text{si } e = ts. \end{cases}$



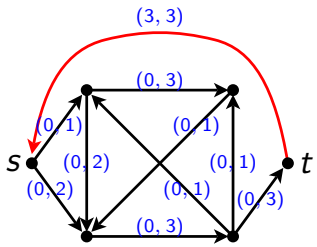
Thm de Hoffmann implique Thm de Ford-Fulkerson

Lemme

1. Il existe une circulation réalisable x dans (G', f', g'). $\Longleftrightarrow$
2. Par le Théorème de Hoffmann :
   1. $f'(e) \leq g'(e) \quad \forall e \in A \cup \{ts\}$,
   2. $d^-_{f'}(Z) \leq d^+_{g'}(Z) \quad \forall Z \subseteq V$.

Démonstration

1. $f'(e) = 0 \leq g(e) = g'(e)\ \forall e \in A$,
   $f'(ts) = M = g'(ts)$.
2. $d^-_{f'}(Z) = \ 0 = d^+_0(Z) \leq d^+_{g'}(Z)$ si Z ne sépare pas s et t,
   $d^-_{f'}(Z) = M \leq d^+_g(Z) = d^+_{g'}(Z)$ si Z sépare s et t.



Thm de Hoffmann implique Thm de Ford-Fulkerson

Lemme

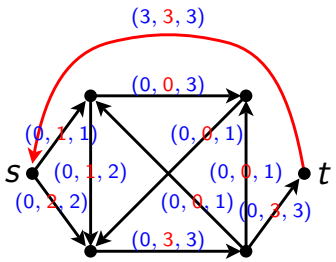
x_G est un (s,t)-flot réalisable de valeurs M dans (G,g).

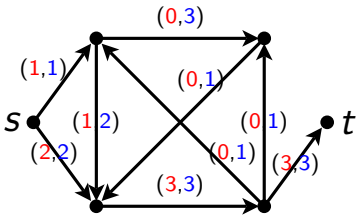
Démonstration

1. $d^+_{x_G}(v) = d^+_x(v) = d^-_x(v) = d^-_{x_G}(v) \quad \forall v \in V \setminus \{s,t\}$, ($x_G$ est un flot)
2. $0 = f'(e) \leq x_G(e) \leq g'(e) = g(e) \quad \forall e \in A$, ($x_G$ est réalisable)
3. $val(x_G) = d^+_{x_G}(s) = d^+_x(s) = d^-_x(s) = x(ts)$ et
   $M = f'(ts) \leq x(ts) \leq g'(ts) = M$, donc $val(x_G) = M$.

Démonstration (Fin)

$M = val(x_G) \leq$ flot max $\leq$ coupe min. $= M$, d'où flot max = coupe min.





Application de la circulation entière

Arrondissement de matrice

Étant donné une matrice réelle A, il faut arrondir (vers le bas/vers le haut)

1. chaque élément a_{ij} de A,
2. la somme de chaque ligne a_i $(1 \leq i \leq m)$,
3. la somme de chaque colonne a^j $(1 \leq j \leq n)$,

de manière à ce que la somme des éléments arrondis de chaque ligne (et colonne) soit égale à l'arrondi de la somme de la ligne (de la colonne).

Modéliser ce problème par un problème de circulation dans un réseau.

Exemple

0.33	0.44	1.24	2.01
1.53	0.41	2.32	4.26
1.86	0.85	3.56	

pas correcte

0	0	1	2
2	0	2	4
2	1	4	

correcte

1	0	1	2
1	1	2	4
2	1	3	

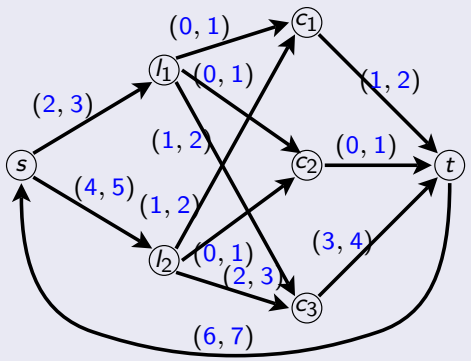
Application de la circulation entière

Construction du réseau

(G, f, g) où

1. $V(G) = \{l_1, \ldots, l_m\} \cup \{c_1, \ldots, c_n\} \cup \{s, t\}$,
2. $A(G) = \{sl_i, l_i c_j, c_j t, ts : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$,
3. $$(f(e), g(e)) := \begin{cases} (\lfloor \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \rfloor, \lceil \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \rceil) & \text{si } e = sl_i, \\ (\lfloor a_{ij} \rfloor, \lceil a_{ij} \rceil) & \text{si } e = l_i c_j, \\ (\lfloor \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \rfloor, \lceil \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \rceil) & \text{si } e = c_j t, \\ (\lfloor \sum_{i,j} a_{ij} \rfloor, \lceil \sum_{i,j} a_{ij} \rceil) & \text{si } e = ts. \end{cases}$$

Exemple

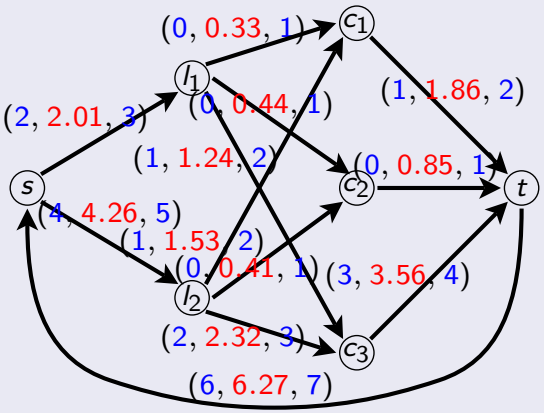


Application de la circulation entière

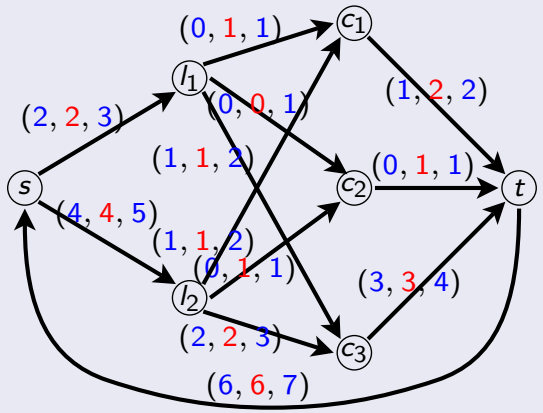
Solution

1. $f(e)$ et $g(e)$ sont entiers pour chaque arc e de G,
2. il existe une circulation réalisable dans (G, f, g),
3. il en existe une, x, telle que $x(e)$ soit entier pour chaque arc e de G.

Exemple



0.33	0.44	1.24	2.01
1.53	0.41	2.32	4.26
1.86	0.85	3.56	



1	0	1	2
1	1	2	4
2	1	3	