Optimisation Combinatoire 2A
Algorithmes d'Edmonds

Zoltán Szigeti

Ensimag
INP Grenoble

Couplages dans les graphes généraux

Théorème de Tutte

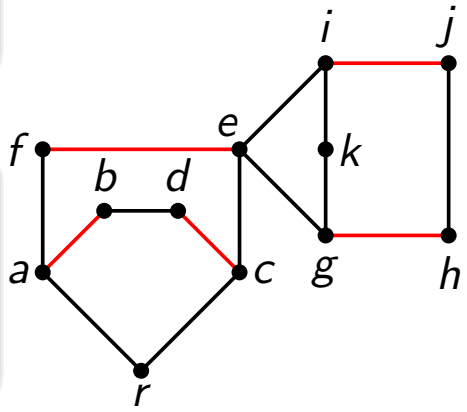
G admet un couplage parfait $\iff c_o(G - X) \leq |X| \quad \forall X \subseteq V(G)$.

Problème

Trouver un couplage parfait.

Théorème de Berge

Un couplage M de G est de cardinal maximum $\iff$ il n'existe pas de chaîne M-augmentante.



Idée 1

1. Trouver une chaîne augmentante.
2. Comme l'algorithme marquage utilise une arborescence pour trouver un chemin de s à t, nous allons construire un arbre alterné.

Arbres

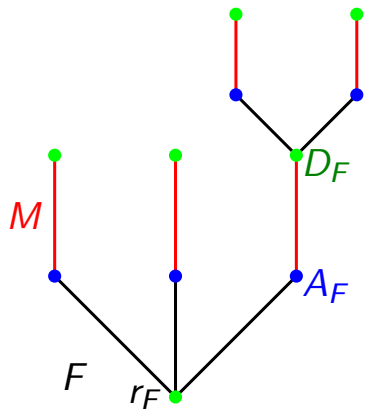
Définition : Étant donnés un graphe G et un couplage M de G,

1. arbre M-alterné :
   1. un arbre F dans G,
   2. un sommet r_F de F est M-insaturé (r_F est la racine de F),
   3. dans F, chaque sommet de la distance impaire de r_F est de degré 2,
   4. la chaîne élémentaire unique dans F de r_F à chaque sommet v de F est M-alternée.
2. sommet impair/pair : $v \in V(F)$ tel que $\text{dist}_F(r_F, v)$ est impair/pair.
3. A_F et D_F : L'ensemble des sommets impairs/pairs de F.

Remarque

$|D_F| = |A_F| + 1$:

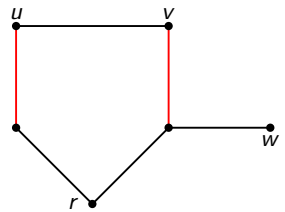
1. $F - r_F$ possède un couplage parfait reliant chaque fois un sommet de A_F à un sommet de D_F,
2. r_F est dans D_F.



Fleurs

Exemple

l'idée de construire un arbre alterné n'est pas suffisante.



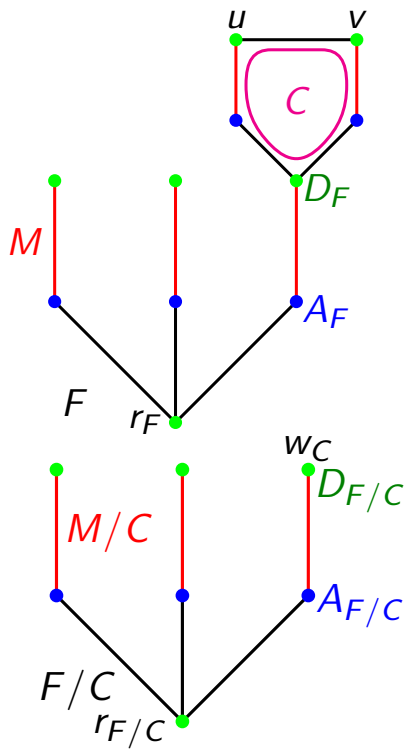
Définition : Étant donné un arbre M-alterné F

fleur : le cycle impair unique C de $F + uv$ où u et v sont deux sommets pairs de F.

Idée 2 d'Edmonds

Contracter la fleur !

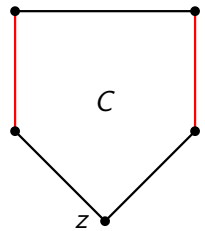
1. On aura les pseudo-sommets w_C !
2. M/C est un couplage de G/C.
3. F/C est un arbre M/C-alterné.
4. Chaque pseudo sommet est un sommet pair.



Décontraction d'une fleur

Lemme

Pour tout cycle impair C et pour tout $z \in V(C)$, $C - z$ possède un couplage parfait.

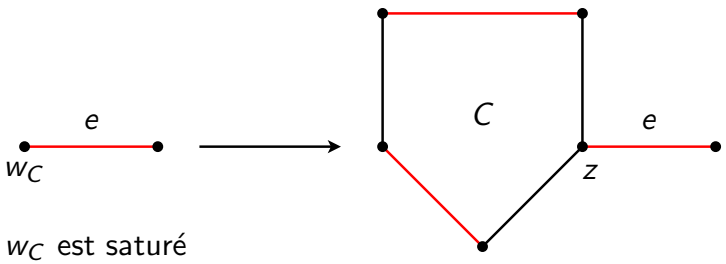


Définition

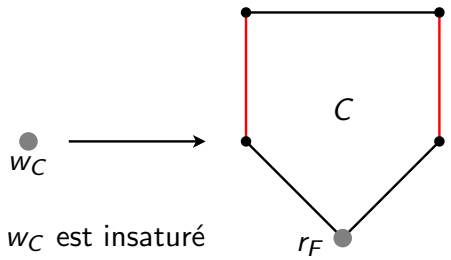
Décontraction d'une fleur : w_C est remplacé par le cycle impair C.

Lemme

Quand on décontracte une fleur, on peut étendre le couplage tel que le nombre de sommets insaturés n'augmente pas.



quand w_C est saturé



quand w_C est insaturé

Algorithme de couplage parfait (Edmonds)

Entrée : $G = (V, E)$ un graphe.
Sortie : Un couplage parfait M de G ou
un ensemble X qui viole la condition de Tutte.

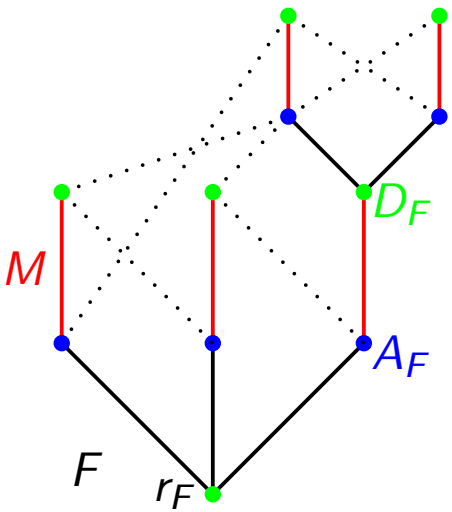
Etape 0. *Initialisation.*
$M_0 := \emptyset, i := 0,$
$G_0 := G, j := 0.$

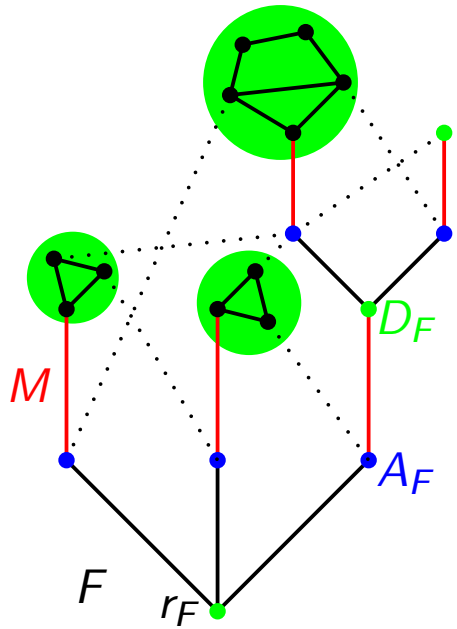
Etape 1. *Condition 1 d'arrêt.*
Si tous les sommets de G sont M_i-saturés alors arrêter avec M_i.

Etape 2. *Commencement de la construction d'un arbre alterné.*
Soit r un sommet M_i-insaturé.
$F_0 := (r, \emptyset), k := 0.$

Etape 3. *Condition 2 d'arrêt.*
Si chaque arête de G_j sortant d'un sommet F_k-pair entre dans un sommet F_k-impair alors arrêter avec $X :=$ l'ensemble des sommets F_k-impairs.

Algorithme de couplage parfait d'Edmonds





Algorithme de couplage parfait d'Edmonds

Etape 4. *Choix de l'arête $u_k v_k$.*

$u_k v_k :=$ une arête de G_j telle que u_k est un sommet F_k-pair et v_k n'est pas un sommet F_k-impair.

Etape 5. *Augmentation de l'arbre alterné.*

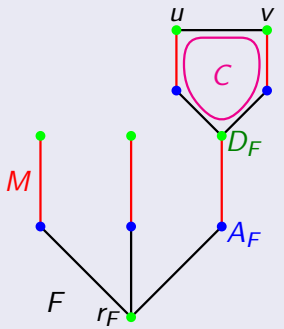
Si v_k n'est pas dans F_k et il existe $v_k w_k \in M_i$ alors faire

$F_{k+1} := F_k + u_k v_k + v_k w_k, k := k+1,$

Aller à l'Etape 3.

Etape 6. *Contraction d'une fleur.*

Si v_k est dans F_k alors faire



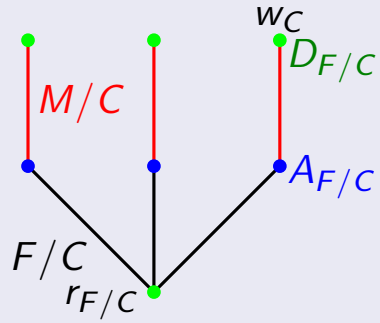
$C_j :=$ le cycle unique dans $F_k + u_k v_k$,

$M_{i+1} := M_i / C_j$, $i := i+1$,

$G_{j+1} := G_j / C_j$, $j := j+1$,

$F_{k+1} := F_k / C_j, k := k+1$,

Aller à l'Etape 3.

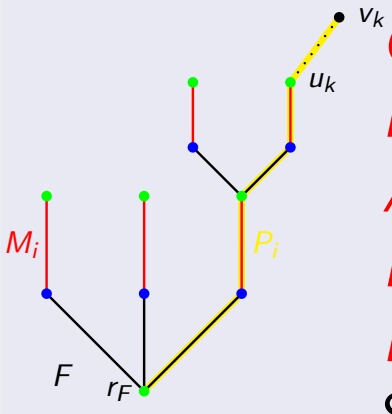


Algorithme de couplage parfait d'Edmonds

Etape 7. *Augmentation du couplage dans G.*

Si v_k n'est pas dans F_k et v_k est M_i-insaturé alors faire

Construction d'une chaîne M_i-augmentante dans G_j.



$Q_i :=$ la chaîne élémentaire unique dans F_k de r_F à u_k,

$P_i := Q_i + u_k v_k$.

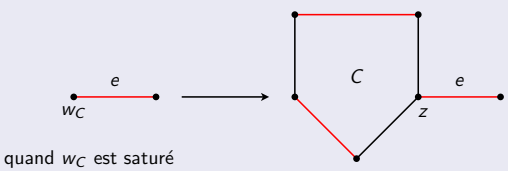
Augmentation du couplage dans G_j.

$M_{i+1} := (M_i \setminus E(P_i)) \cup (E(P_i) \setminus M_i), i := i + 1.$

Décontraction des fleurs contractées en ordre inverse.

Si les fleurs contractées sont $C_0, \ldots, C_{j-1}$ alors

Tant que $j \neq 0$ faire



$e_{j-1} :=$ l'arête du couplage M_i incidente à $w_{C_{j-1}}$,

$G_{j-1} := G_j \div C_{j-1}$ (décontraction de C_{j-1}),

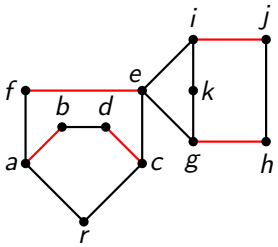
$z_{j-1} :=$ le sommet de C_{j-1} qui est incident à e_{j-1},

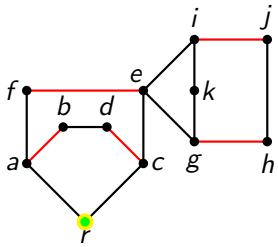
$M_{i+1} := M_i \cup$ le couplage parfait de $C_{j-1} - z_{j-1}$.

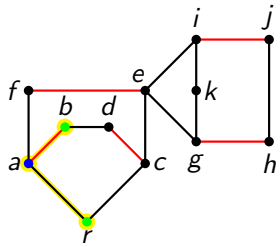
$i := i + 1, j := j - 1.$

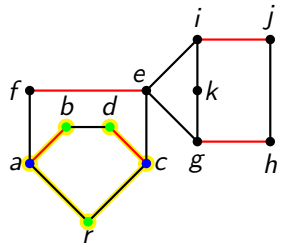
Aller à l'Etape 1.

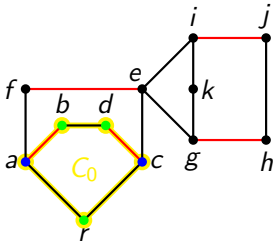
Exécution de l'algorithme

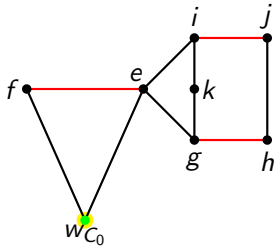


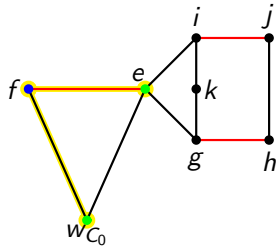


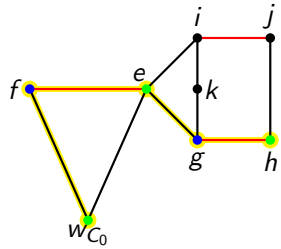


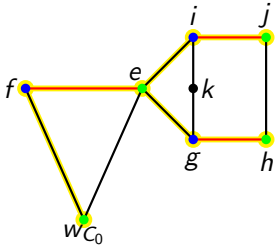


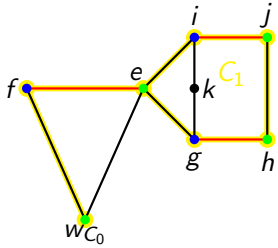


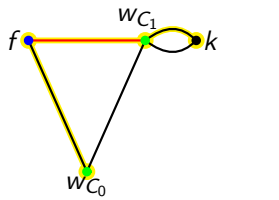


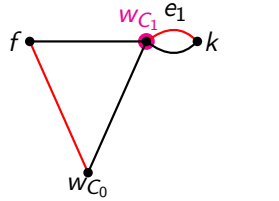


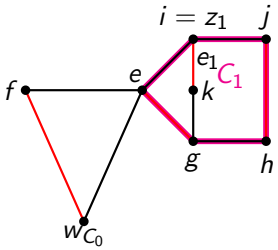


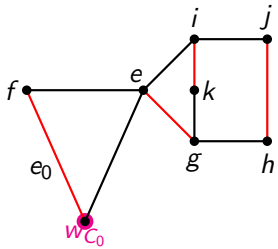


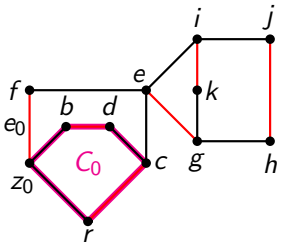


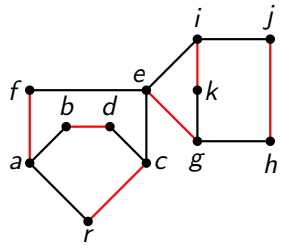












Justification de l'algorithme de couplage parfait

Théorème

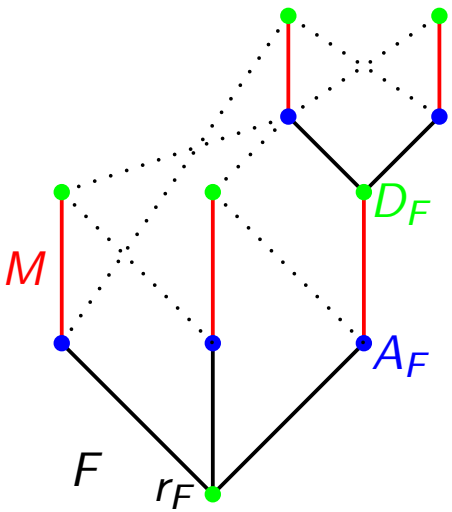
1. Si l'algorithme s'arrête à l'Etape 3 alors
   1. les sommets dans D_{F_k} sont isolés dans $G_j - A_{F_k}$,
   2. chaque sommet de D_{F_k} correspond à un ensemble de sommets de G de cardinal impair,
   3. $X = A_{F_k}$ viole la condition de Tutte.
2. A l'Etape 7 on a augmenté la taille du couplage de G.
3. L'algorithme s'arrête en temps polynomial.

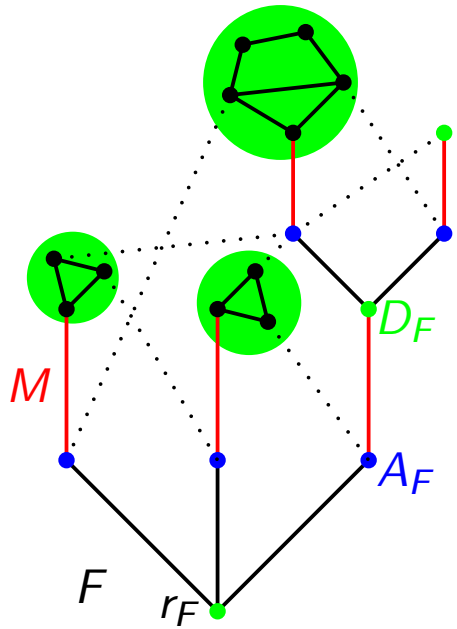
Remarque

Cet algorithme d'Edmonds implique le Théorème de Tutte.

Entrée : $G = (V, E)$ un graphe.
Sortie : Un couplage parfait M de G ou
un ensemble X qui viole la condition de Tutte.

Justification de l'algorithme de couplage parfait





Justification de l'algorithme de couplage parfait

Démonstration

1. Si l'algorithme s'arrête à l'Etape 3 alors
   1. $\forall uv \in E(G_j), u \in D_{F_k}$, on a $v \in A_{F_k}$, les sommets dans D_{F_k} sont donc isolés dans $G_j - A_{F_k}$.
   2. Quand on décontracte un pseudo-sommet w_C, on remplace un sommet par un nombre impair de sommets puisque C est une fleur.
   3. Par 1 et 2, $c_o(G - X) = c_o(G - A_F) \geq |D_F| = |A_F| + 1 > |X|$.
2. La taille du couplage augmente :
   1. Dans le graphe contracté : deux sommets insaturés sont devenus saturés et les sommets saturés restent saturés.
   2. La décontraction d'une fleur n'augmente pas le nombre de sommets insaturés (par Lemme).
3. L'algorithme s'arrête en temps polynomial :
   1. Chaque étape est polynomiale.
   2. On peut augmenter le couplage au plus $n/2$ fois.
   3. Entre deux augmentations du couplage : on peut augmenter l'arbre au plus $n/2$ fois, et on peut contracter une fleur au plus $n/2$ fois.

Algorithme de couplage de cardinal maximum d'Edmonds

ENTRÉE: $G = (V, E)$ un graphe.

SORTIE : Un couplage de G de cardinal maximum.

Etape 1. *Construction des arbres alternés.*

Tant qu'il existe un sommet insaturé faire

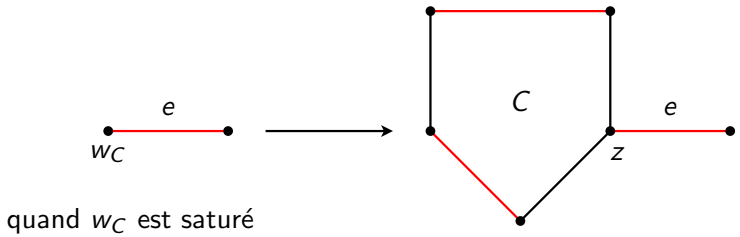
Exécuter l'algorithme de couplage parfait avec la modification suivante :

avant s'arrêter à l'Etape 3 effacer les sommets de l'arbre alterné.

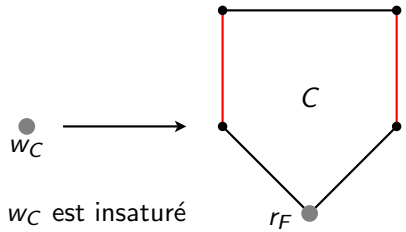
Etape 2. *Décontraction des fleurs contractées en ordre inverse.*

Comme dans l'algorithme de couplage parfait en ajoutant que si $w_{C_{j-1}} = r_{F_k}$ alors $z_{j-1} := r_{F_{k-1}}$.

Etape 3. Arrêter.



quand w_C est saturé

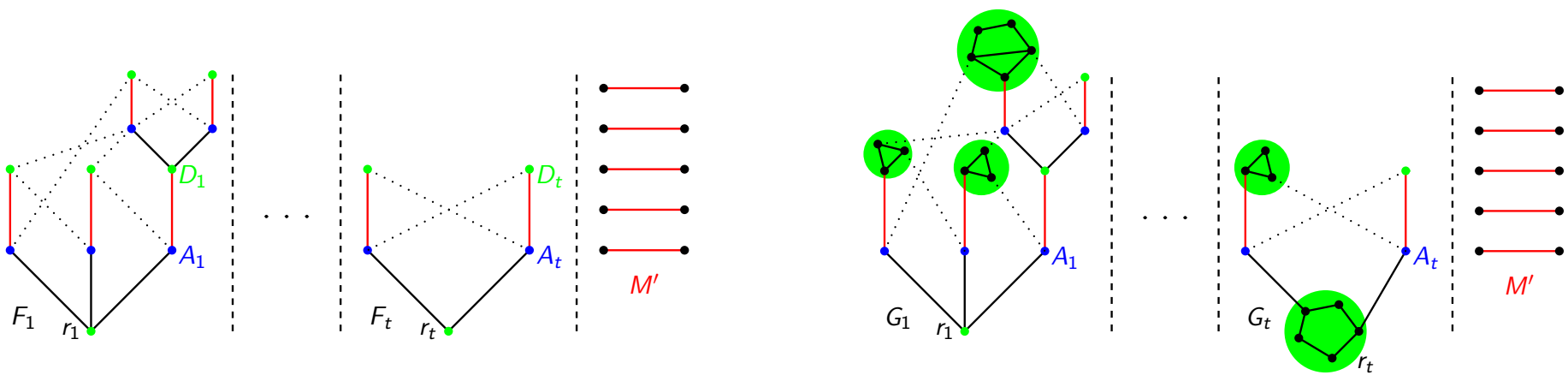


quand w_C est insaturé

Justification de l'algorithme de couplage de cardinal max.

Structure

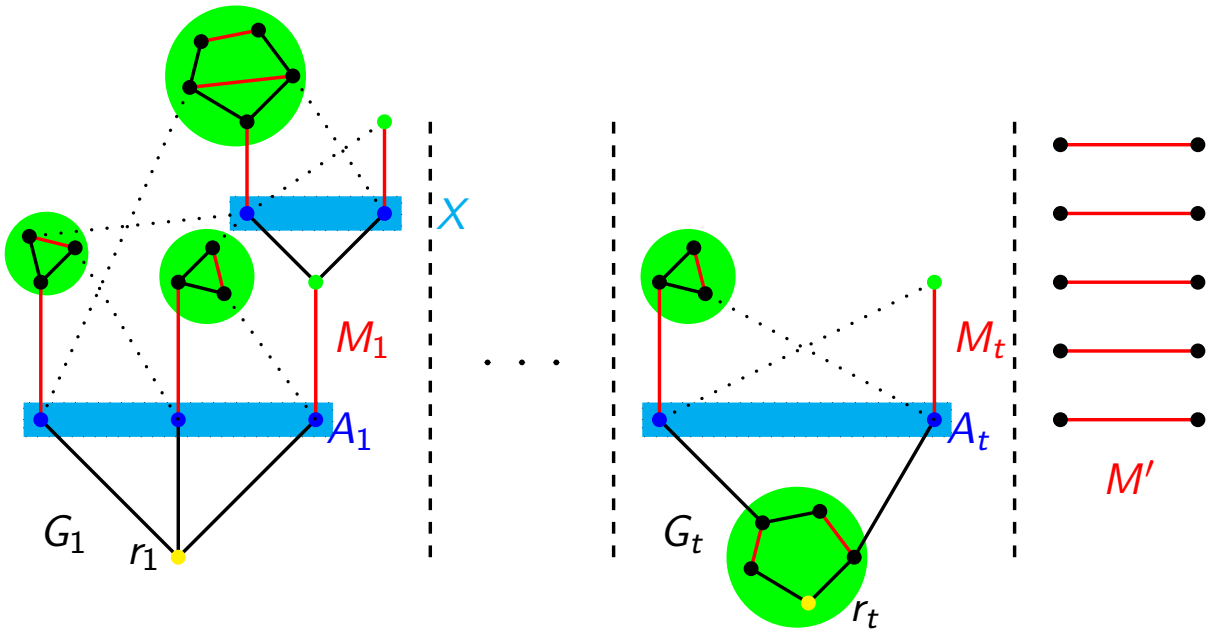
- Quand l'algorithme s'arrête on a t arbres alternés $F_1, \ldots, F_t$ qui sont sommets disjoints et un couplage parfait M' du reste du graphe.
- Chaque sommet de D_i correspond à un graphe connexe impair dans G.
- Chaque F_i correspond à un graphe G_i dans G.



Justification de l'algorithme de couplage de cardinal max.

Théorème

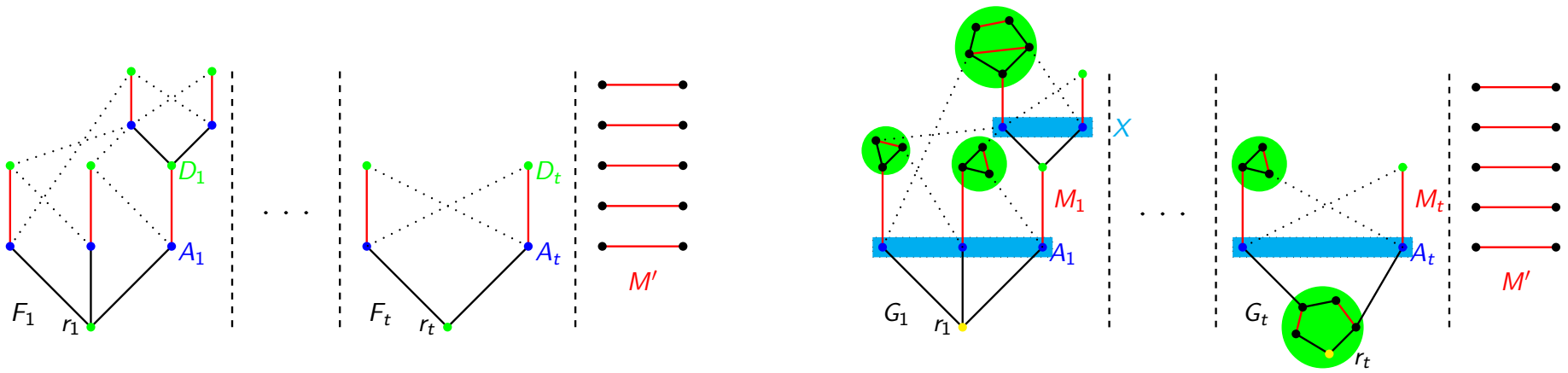
1. G_i possède un couplage M_i avec un seul sommet M_i-insaturé dans G_i.
2. $c_o(G - X) - |X| = t$ où $X = \bigcup_{i=1}^{t} A_{F_i}$.
3. $M = M' \cup \bigcup_{i=1}^{t} M_i$ est un couplage de cardinal maximum de G.
4. L'algorithme s'arrête en temps polynomial.



Justification de l'algorithme de couplage de cardinal max.

Proof

1. Dans F_k il y a un seul sommet insaturé (r_{F_k}) et la décontraction d'une fleur n'augmente pas le nombre de sommets insaturés (par Lemme).
2. $c_o(G - X) = c_o(G - \bigcup_{i=1}^{t} A_{F_i}) = \sum_{i=1}^{t} |F_i - A_{F_i}| = \sum_{i=1}^{t} |D_{F_i}| = \sum_{i=1}^{t} (|A_{F_i}| + 1) = |\bigcup_{i=1}^{t} A_{F_i}| + t = |X| + t$.



Justification de l'algorithme de couplage de cardinal max.

Démonstration

3. Par la direction triviale de la formule de Berge-Tutte, 1 et 2, $\max \leq \min \leq |\{\text{sommets } M\text{-insaturés}\}| = t = c_o(G - X) - |X| \leq \max$. Donc M minimise le nombre de sommets insaturés, et ainsi maximise le cardinal d'un couplage.
4. On exécute au plus n fois l'algorithme de couplage parfait qui est polynomial.

Remarque

Cet algorithme d'Edmonds implique la Formule de Berge-Tutte.