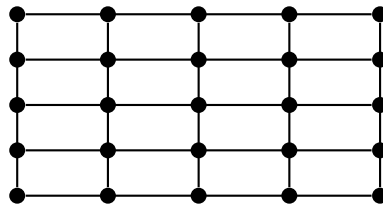


Exercice 1. Trouver tous les arbres à 6 sommets à isomorphisme près.

Exercice 2. Soit T un arbre comportant au moins trois sommets de degré 1. Montrer que T contient au moins un sommet de degré au moins 3.

Exercice 3. Soit G le graphe de la grille 5×5 , où les arêtes horizontales sont de poids 2 et les arêtes verticales sont de poids 1 (voir la figure ci-dessous).



Question 1. Quel est le poids d'un arbre couvrant de G de poids minimum ?

Question 2. Quelle serait la réponse pour une grille $n \times n$, toujours avec les arêtes verticales de poids 1 et les arêtes horizontales de poids 2 ?

Exercice 4. Un document important, rédigé en français, doit être traduit en cinq autres langues : allemand, anglais, espagnol, italien et portugais. Parce qu'il est plus difficile de trouver des traducteurs pour certaines langues que pour d'autres, certaines traductions sont plus chères que d'autres. Les coûts (en euros) sont indiqués dans la table ci-dessous.

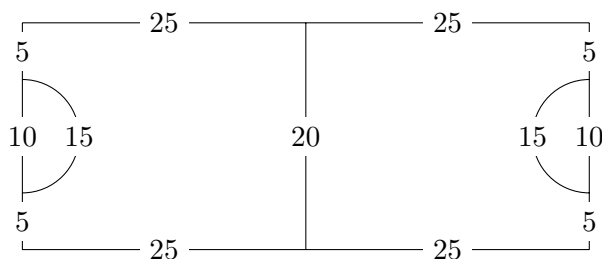
de/à	fr.	all.	ang.	it.	port.	esp.
fr.	*	90	50	70	120	80
all.	90	*	60	100	150	100
ang.	50	60	*	90	130	80
it.	70	100	90	*	110	70
port.	120	150	130	110	*	50
esp.	80	100	80	70	50	*

On veut obtenir une version du document dans chaque langue à un coût total minimum.

Question 1. Modéliser le problème comme un problème d'un arbre couvrant de poids minimum. Décrire clairement le graphe.

Question 2. Quel est le coût minimum pour obtenir une version dans chaque langue ?

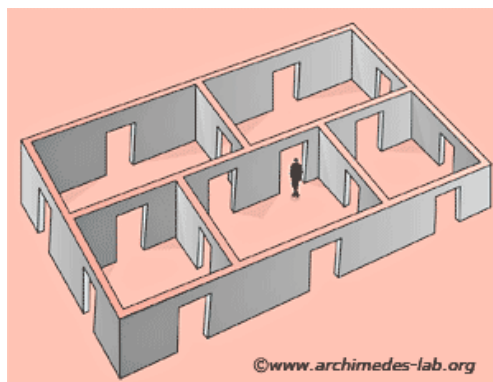
Exercice 5. Le jardinier doit marquer les lignes blanches sur un terrain de foot à 5, dont les distances (en mètres) sont données dans le diagramme suivant.



L'appareil à marquer les lignes étant cassé, il ne peut pas être arrêté et marque des lignes partout où il passe.

Question 1. Quelle distance doit parcourir le jardinier? (Supposons qu'il est obligé de revenir au point de départ.)

Exercice 6. Est-il possible de faire un tour de la maison représentée sur la figure suivante en passant par chaque porte exactement une fois?



Exercice 7. Soit G un graphe connexe non eulérien. Est-il toujours possible de rendre G eulérien en lui rajoutant un sommet et quelques arêtes incidentes à ce sommet?

Exercice 8. Jeu de cartes

Dans un jeu de $52 = 13 \times 4$ cartes, chaque carte a une valeur (A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, V, D, R) et une couleur (\spadesuit , \diamondsuit , \heartsuit , \clubsuit).

Question 1. Quelle est la longueur maximale d'une suite de cartes qu'on peut construire à partir d'un jeu de 52 cartes de façon à ce que deux cartes consécutives soient de la même valeur ou de la même couleur, mais si on prend trois cartes consécutives quelconques, elles n'ont pas toutes trois la même valeur ni la même couleur? Par exemple, $A\spadesuit, 7\spadesuit, 7\heartsuit, D\heartsuit$ est une suite qui respecte cette règle.

Exercice 9. On dispose d'un fil de fer de 120 cm. Est-il possible de préparer une carcasse de cube de 10 cm d'arête sans couper le fil? Sinon, combien de fois au minimum faut-il couper le fil de fer pour fabriquer cette carcasse?