Notes de cours Recherche opérationnelle
L3 MIAGE

1 Introduction aux graphes

1.1 Graphes

Soit X un ensemble. On note $\binom{X}{2}$ l'ensemble des parties à deux éléments de X. En général, on notera uv la partie $\{u, v\}$. L'ordre et les répétitions ne sont pas pris en compte : $12 = 21$.

Si $X = \{1, 2, 3\}$, alors $\binom{X}{2} = \{12, 13, 23\}$.

Définition 1.1. Un *graphe* est un couple (V, E) formé par un ensemble fini V et un sous-ensemble E de $\binom{X}{2}$. V est l'ensemble des *sommets* de G (on le note aussi $V(G)$). E est l'ensemble des *arêtes* de G (on le note aussi $E(G)$).

Exemples des graphes :

— $(\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{12, 13, 23, 24\})$.
— Métro de Paris. $(\{\text{stations}\}, \{\text{stations voisines}\})$.
— Réseaux sociaux. $(\{\text{personnes}\}, \{\text{amitiés}\})$.

On peut représenter les graphes graphiquement (d'où le nom « graphe »). Pour chaque sommet, on dessine un cercle ou disque. Pour représenter une arête uv, on trace un trait entre les cercles correspondants à u et à v.

La forme des « cercles » et des « traits » n'a aucune importance (sauf pour la lisibilité de la figure). Ce qui compte, c'est de traduire graphiquement s'il y a une arête entre deux sommets ou non.

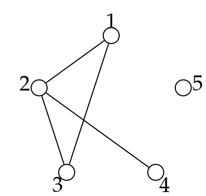

Figure 1: Représentation graphique du graphe $G = (\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{12, 13, 23, 24\})$.

— 1 et 2 sont adjacents
— 4 est un voisin de 2
— $N(2) = \{1, 3, 4\}$, $N(5) = \emptyset$
— 5 est isolé
— 12 est incidente à 2

Définition 1.2. Soient G un graphe, u et v deux sommets de G et e une arête de G. On dit que u et v sont *adjacents* si $uv \in E(G)$, et que e est incidente à u si $u \in e$. Les deux éléments de e sont ses *extrémités*. Le *voisinage* de u dans G est l'ensemble, noté $N_G(u)$, des sommets de G adjacents à u. Les *voisins* de u sont les éléments de $N_G(u)$. L'ensemble des arêtes incidentes à u est noté $\delta_G(u)$.

1.2 Sous-graphes

Définition 1.3. Soient $G = (V, E)$ et $H = (W, F)$ deux graphes.

— H est un *sous-graphe* de G si $W \subseteq V$ et $F \subseteq E$.
— H est un *sous-graphe couvrant* de G si $W = V$ et $F \subseteq E$.
— H est un *sous-graphe induit* de G si $W \subseteq V$ et F contient toutes les arêtes $uv \in E$ où $u, v \in W$. On le note $G[W]$.

1.3 Isomorphismes

Souvent, on ne fera pas de distinction entre deux graphes ayant « la même forme », c'est-à-dire : qu'on ne peut les distinguer si l'on oublie les noms de leurs sommets.

Définition 1.4. Soient G, H deux graphes. On dit que G est *isomorphe* à H s'il existe une bijection f de $V(G)$ sur $V(H)$ telle que pour toute paire xy de sommets de G, on a $xy \in E(G)$ si et seulement si $f(x)f(y) \in E(H)$.

La relation d'isomorphisme est réflexive, symétrique et transitive (relation d'équivalence).

On note qu'il n'est pas toujours facile, à partir de représentations graphiques, de décider si deux graphes sont isomorphes (exemple : K_4 en forme planaire et forme carrée).

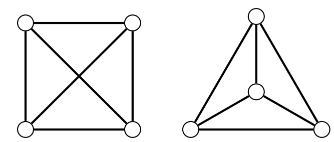

FIGURE 2: Deux représentations du graphe complet K_4.

1.4 Représentation matricielle et par listes

Il y a plusieurs façons de représenter un graphe en mémoire. On va en voir trois. En général, chacune est plus ou moins adaptée au problème considéré et possède des avantages/inconvénients notamment par rapport à la densité (en arêtes) du graphe.

Définition 1.5. Soit G un graphe à n sommets. On choisit une numérotation $v_1, \ldots, v_n$ des sommets de G. La *matrice d'adjacence* de G (pour la numérotation choisie) est la matrice M carrée $n \times n$ sur $\{0, 1\}$ définie par : $M_{ij} = 1$ si et seulement si $v_iv_j \in E(G)$, pour tous $i, j = 1, \ldots, n$.

Matrice d'adjacence de G :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque qu'elle est *symétrique* et nulle sur la diagonale (un sommet n'est pas adjacent à lui-même, par définition). La réunion de ces deux conditions suffit à garantir qu'une matrice carrée à coefficients 0 ou 1 est une matrice d'adjacence (voir TD).

Définition 1.6. Soit G un graphe qui a n sommets et m arêtes. On numérote ses sommets $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ et ses arêtes $E(G) = \{e_1, \ldots, e_m\}$. La *matrice d'incidence* de G est la matrice N sur $\{0, 1\}$ de taille $n \times m$ définie par : $N_{ij} = 1$ si et seulement si e_j est incidente à v_i, pour tous $i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, m$.

Matrice d'incidence de G :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition 1.7. Soit G un graphe. Une représentation en *liste d'adjacence* de G est la donnée, pour chaque sommet v de G, de la liste des voisins de v.

Liste d'adjacence de G :

1 : [2, 3]

2 : [1, 3, 4]

3 : [1, 2]

4 : [2]

5 : []

1.5 Degrés

Définition 1.8. Soient G un graphe et v un sommet de G. Le *degré* de v dans G, noté $d_G(v)$, est le nombre d'arêtes de G incidentes à v. C'est aussi (par simplicité des graphes définis dans ce cours) le nombre de voisins de v : $d_G(v) = |N_G(v)|$.

Dans le graphe G :

— $d(1) = 2$
— $d(2) = 3$
— $d(3) = 2$
— $d(4) = 1$
— $d(5) = 0$

On dit que v est *isolé* si $d_G(v) = 0$ et qu'il est une *feuille* si $d_G(v) = 1$.

Théorème 1.9 (dit (rarement) des poignées de main). *Soit G un graphe. On a $\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2|E(G)|$.*

Démonstration. Soit S la somme de tous les éléments de la matrice d'incidence de G. La somme de chaque ligne est égale au degré du sommet correspondant, donc $S = \sum_{v \in V(G)} d_G(v)$. La somme de chaque colonne est égale à deux, et on a $|E(G)|$ colonnes, donc $S = 2|E(G)|$. □

Corollaire 1.10. *Soit G un graphe. La somme* $\sum_{v \in V(G)} d_G(v)$ *est paire.*

1.6 Notations supplémentaires et variations

Définition 1.11. Soit $n \geq 1$ un entier. Le *graphe complet* à n sommets est le graphe $(\{1, \ldots, n\}, \binom{\{1,\ldots,n\}}{2})$. Il est noté K_n.

Un *multigraphe* est un graphe auquel on permet d'avoir plus d'une arête entre deux sommets ou une arête dont les deux extrémités sont identiques (boucles). Ils se définissent rigoureusement à l'aide de la notion de multi-ensemble.

Un graphe *orienté* est obtenu à partir d'un graphe en ordonnant, pour chaque arête, ses extrémités. Autrement dit, chaque arête est dirigée vers une de ses extrémités.

Dans un *hypergraphe*, les (hyper-)arêtes peuvent être incidentes à un nombre arbitraire de sommets (et pas seulement à deux comme dans le cas des graphes).