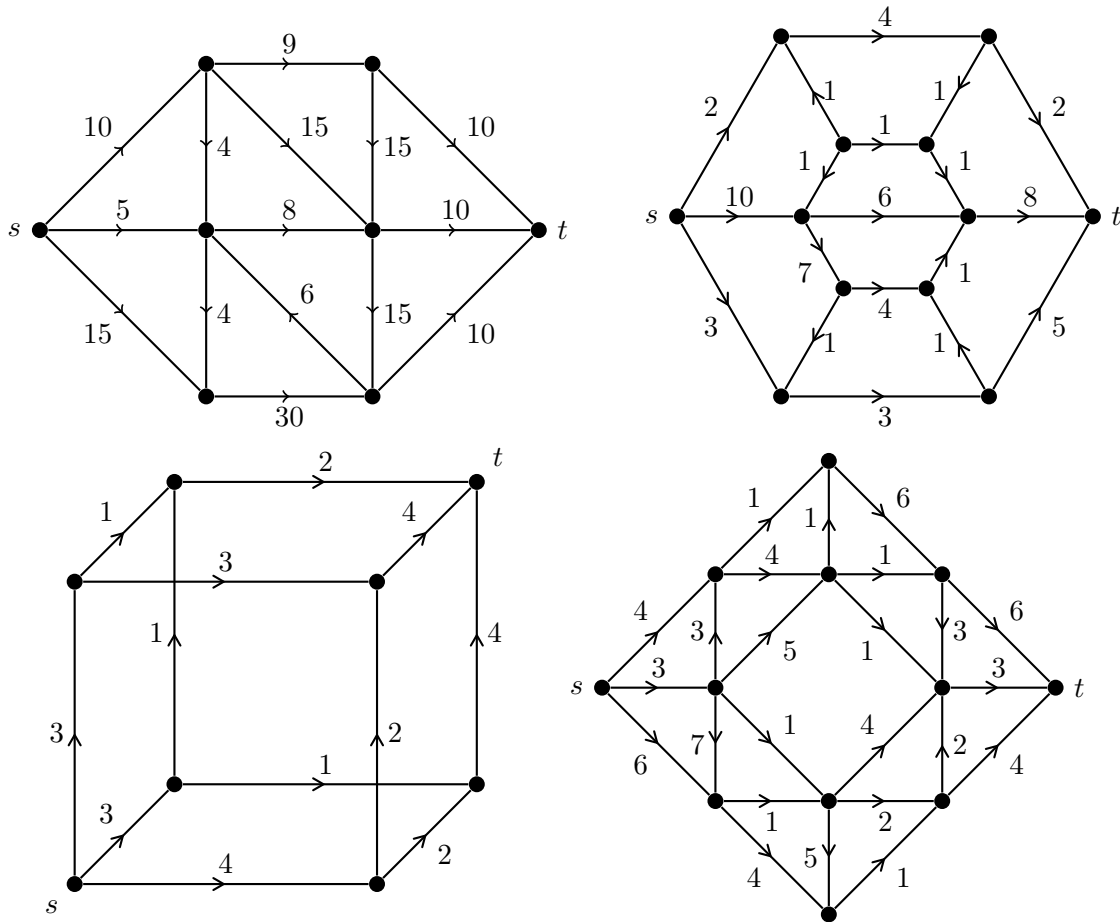


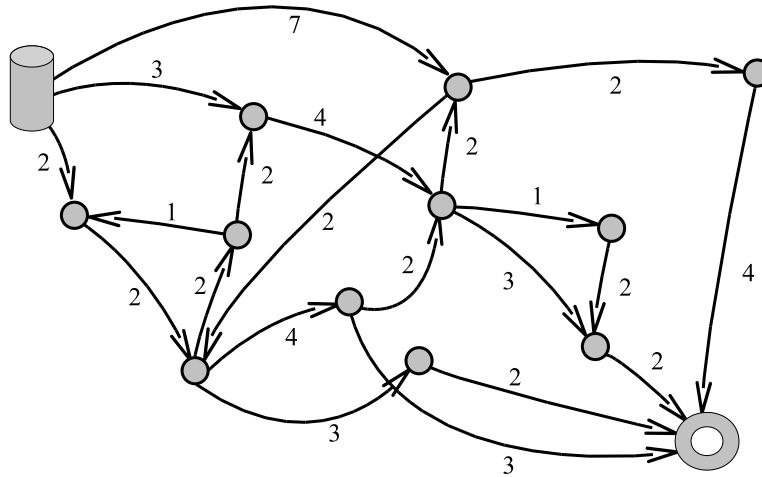
Exercice 1. Entraînement avec Ford-Fulkerson

Utiliser l'algorithme de Ford-Fulkerson pour trouver un flot maximum dans les réseaux suivants. Prouver que la valeur du flot est bien maximum.



Exercice 2. Flot dans un oléoduc

Une compagnie pétrolière souhaite acheminer du pétrole par oléoduc vers un pays client. Le réseau d'oléoduc comporte plusieurs tronçons, chacun ayant une capacité maximale (en débit) à ne pas dépasser. Les tronçons sont directionnels. Le problème est de trouver le débit maximum que la compagnie pétrolière peut envoyer vers le client via le réseau. La compagnie pétrolière est représentée par le cylindre, le client par le jeton.



Question 1. Trouver “à la main” un flot de valeur, disons, au moins 5 ou 6 dans ce réseau.

Question 2. Appliquer l’algorithme de Ford-Fulkerson en prenant comme flot de départ non plus le flot nul partout mais le flot trouvé à la question précédente.

Question 3. Quelle est la valeur du flot maximum dans ce réseau? Quelles capacités d’arcs faut-il envisager d’augmenter en vue d’augmenter la valeur du flot maximum dans ce réseau?

Exercice 3. Flot maximum et couplage maximum dans un graphe biparti

Question 1. Dans un problème de flot maximum, démontrer que si toutes les capacités des arcs sont des nombres entiers, alors il existe nécessairement un flot maximum entier (càd tel que le flot envoyé sur chaque arc est un entier).

Considérons un graphe biparti $G = (V, E)$, et notons A et B la bipartition des sommets de G (càd $V = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset$). Un couplage de G est un ensemble d’arêtes $M \subseteq E$ tel que tout sommet de V appartient à au plus une arête de M (voir figure ci-dessous pour un exemple). Le problème du couplage maximum consiste à déterminer un couplage M tel que $|M|$, le nombre d’arêtes du couplage, est maximum.

Le problème de couplage maximum modélise des problématiques d’affectation de tâches. On peut par exemple imaginer que l’ensemble A représente un ensemble de machines, et l’ensemble B représente un ensemble de tâches. Il y a une arête entre une machine et une tâche si elle sont compatibles, càd si la machine peut réaliser la tâche. Un couplage maximum donne une affectation de machines à des tâches de sorte à ce que le nombre de tâche réalisées soit maximum.

Question 2. En orientant les arêtes de A vers B et en rajoutant deux sommets s et t ainsi que des arêtes partant de s et des arêtes allant vers t , démontrer que le problème du couplage maximum dans G est équivalent à la recherche d’un flot maximum entier dans un certain graphe orienté H (on précisera la construction de H en fonction de G et les capacités des arêtes de H).

Question 3. À l’aide de la question précédente, démontrer que l’ensemble M de la figure ci-dessous (M est noté en gras sur la figure) est un couplage maximum du graphe.

