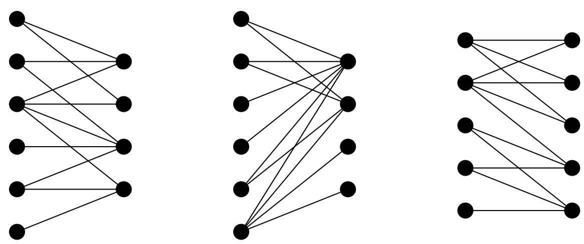
Couplages

INF303 *TD8*

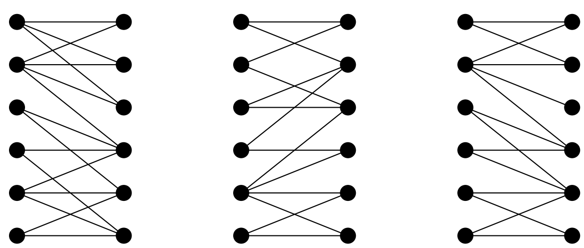
Exercice 1.

Pour chaque graphe dans la figure, trouver un couplage maximum et justifier pourquoi il est maximum.



Exercice 2.

Pour chaque graphe dans la figure, trouver un couplage parfait ou expliquer pourquoi un tel couplage n'existe pas.



Exercice 3. *

Soit G un graphe biparti et k-régulier (tous les sommets ont degré $k \geq 1$).

Question 1. En utilisant le lemme des mariages, montrer que G a un couplage parfait.

Question 2. Déduire qu'on peut partitionner ses arêtes en k couplages parfaits.

Exercice 4. **Cartes**

On distribue un jeu de 52 cartes en faisant treize paquets de quatre cartes chacun.

Question 1. En utilisant le « lemme des mariages », expliquer pourquoi il est possible de prendre une carte de chaque paquet de telle façon qu'on termine avec treize cartes contenant toutes les valeurs (un as, un 2, et ainsi de suite jusqu'à un roi).

Exercice 5. **Speed dating**

À une soirée « speed dating », six femmes et six hommes se rencontrent pour un tête à

	Guillaume	Henri	Ignace	Jean	Karl	Laurent
Amélie	non	non	non	non	oui	non
Béatrice	oui	non	non	oui	oui	non
Céline	oui	non	oui	non	oui	non
Denise	oui	oui	non	oui	oui	oui
Émilie	oui	non	oui	non	non	non
Françoise	oui	oui	non	oui	non	non

TABLE 1 – Les réponses des femmes

	Amélie	Béatrice	Céline	Denise	Émilie	Françoise
Guillaume	oui	non	oui	non	oui	oui
Henri	oui	non	oui	oui	non	non
Ignace	oui	oui	oui	oui	oui	oui
Jean	oui	oui	non	non	oui	oui
Karl	oui	non	oui	oui	non	non
Laurent	oui	oui	non	oui	oui	oui

TABLE 2 – Les réponses des hommes

tête de dix minutes. Après chaque entretien, les participants cochent une case « oui » ou « non » dans ses formulaires. Les organisateurs pourront donner à chacun l'email de l'autre seulement si les deux ont coché « oui ».

Les réponses sont données dans les deux tables.

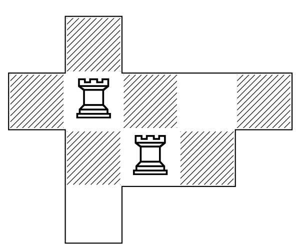
Question 1. Comment peut-on modéliser ce problème par un graphe ?

Les organisateurs, étant très conservateurs, ne veulent pas donner plus qu'une adresse à chaque participant. Mais ils essaient quand même de satisfaire le plus grand nombre de participants.

Question 2. Est-il possible d'envoyer une adresse email à tous les participants ? Sinon, quel est le plus grand nombre de rencontres qui peuvent s'effectuer ?

Exercice 6.

Considérons l'échiquier réduit suivant. On y a placé deux tours qui ne se menacent pas mutuellement.



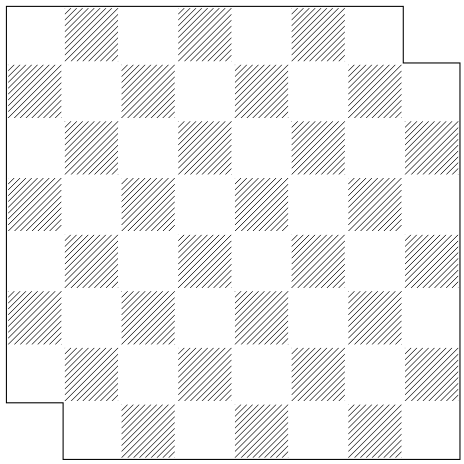
Quel est le nombre maximum de tours qu'on peut placer sur l'échiquier de sorte que les tours ne se menacent pas mutuellement ? Donnez un certificat d'optimalité.

Exercice 7. Dominos

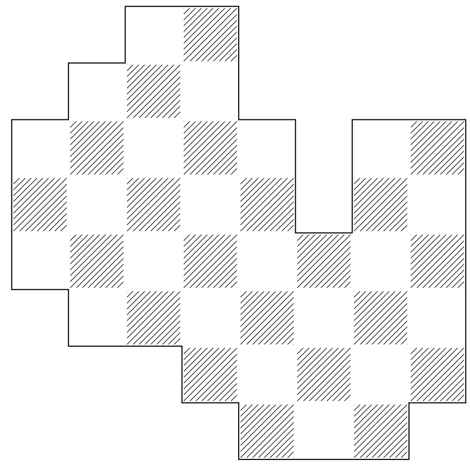
On se donne un échiquier auquel on a enlevé un certain nombre de cases, qu'on appelle E.

Un domino est une figure 2×1 ou 1×2. On se demande si il est possible de paver (on dit aussi partitionner) E en dominos (c'est à dire recouvrir E, sans chevauchement, avec des dominos).

Question 1. Montrer que ce problème est équivalent à un problème de couplage sur un graphe biparti que l'on explicitera. En déduire, en utilisant le cours, un algorithme pour savoir si E a un pavage en dominos.



E_1



E_2

Question 2. Montrer que E_1 n'a pas de pavage en dominos.

Question 3. En utilisant le théorème des mariages, montrer que E_2 n'a pas de pavage en dominos.

Exercice 8. *

Montrer qu'un arbre T a un couplage parfait si et seulement s'il y a exactement une composante connexe avec un nombre impair de sommets dans $T - v$.

Exercice 9. *

Soit G un graphe 3-régulier tel que $G - e$ est connexe, pour toute arête e de G. En utilisant le théorème de Tutte, montrer que G contient un couplage parfait.