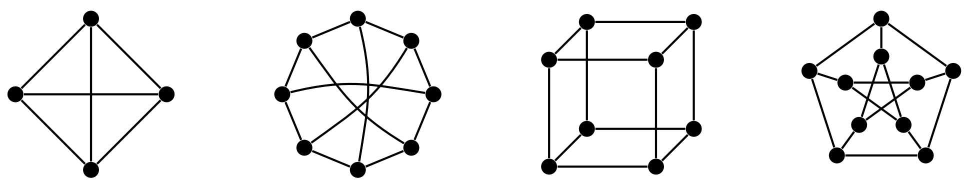
Graphes planaires

INF303 *TD7*

Exercice 1.

Question 1. Pour chacun des graphes suivants, décidez si le graphe est planaire ou non. Si c'est le cas, donnez une représentation planaire du graphe et construisez son dual. Sinon, trouvez un sous-graphe qui est une subdivision de K_5 ou $K_{3,3}$.



(a) (c) (b) (d)

Exercice 2. Prouvez par récurrence : le nombre d'arêtes d'une triangulation planaire à $n \geq 3$ sommets est $3n - 6$.

Exercice 3. Généralisez la formule d'Euler pour un graphe planaire avec c composantes connexes.

Exercice 4. Ballon de football

Le ballon de football est un polyèdre dont toutes les faces sont des pentagones ou des hexagones (voir ci-dessous). Il peut être représenté par un graphe G planaire 3-régulier, avec un plongement dont toutes les faces sont bornées par cinq ou six arêtes. Soit n, m, p et h le nombre de sommets, arêtes, pentagones et hexagones de G, respectivement.

Question 1. Exprimez m en fonction de n.

Question 2. Exprimez m en fonction de p et h.

Question 3. Utilisez la formule d'Euler et les Questions 1 et 2 pour calculer p, le nombre de pentagones du ballon.

Exercice 5. Graphes planaires extérieurs

Un graphe est *planaire extérieur* s'il peut être dessiné dans le plan sans croisements, de telle façon que tous les sommets appartiennent à la face extérieure du tracé. Voici un exemple :

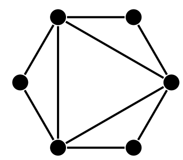


FIGURE 1 – Un graphe planaire extérieur.

Question 1. Prouver que tout graphe planaire extérieur contient un sommet de degré inférieur ou égal à 2.

Question 2. Soit G un graphe planaire extérieur. Démontrer par récurrence sur le nombre de sommets de G, en utilisant la propriété ci-dessus, que $\chi(G) \leq 3$.

Exercice 6. Existe-t-il un graphe planaire à 11 sommets tel que le graphe complémentaire soit planaire aussi ?

Exercice 7. Soient G et G^* des graphes connexes duaux plongés dans la plan. Montrer que G est biparti si et seulement si G^* est eulérien.

Exercice 8. On dit qu'un graphe G est 2-arête connexe si toute arête de G appartient à un cycle de G. Soit G un graphe planaire 2-arête connexe à n sommets, tel que tous les cycles de G sont de longueur au moins $g \geq 3$.

Question 1. Trouver une borne supérieure pour le nombre d'arêtes de G en terme de n et g.

Question 2. En déduire que G admet un sommet de degré inférieur à $\frac{2g}{g-2}$.

Question 3. En déduire qu'un graphe planaire dont tous les cycles sont de longueur au moins 5 est 4-coloriable.