Coloration

INF303 *TD6*

Exercice 1. Les étudiants d'une université ont des examens annuels dans tous les cours auxquels ils s'inscrivent. Naturellement, les examens de deux cours différents ne peuvent avoir lieu en même temps s'il y a des étudiants inscrits à ces deux cours. Comment doit-on organiser les examens pour qu'il y ait le moins de sessions possibles ?

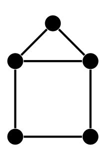
Question 1. Modélisez ce problème par des graphes.

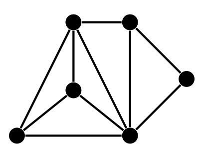
Exercice 2. Un groupe de 8 personnes doit participer à deux réunions. À la première réunion, ils sont tous assis autour d'une table ronde. Comme l'entente est totale, pour la seconde réunion, chacun des participants, non seulement ne veut pas se retrouver à côté de l'un ou l'autre de ses voisins, mais ne veut pas non plus qu'ils soient assis à la même table.

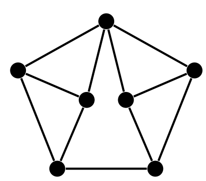
Question 1. Combien de tables au minimum seront alors nécessaires ? Combien de personnes au maximum pourront s'asseoir à une même table ?

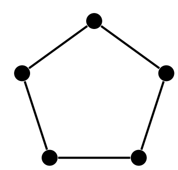
Question 2. On suppose maintenant qu'il y a 9 participants et que l'entente est tout aussi cordiale. Que se passera-t-il alors ?

Exercice 3. Donnez le nombre chromatique de chacun des graphes suivants et justifiez pourquoi.


(a)


(b)


(c)


(d)

Exercice 4. Montrez que l'unique graphe à n sommets ayant comme nombre chromatique n est le graphe complet K_n.

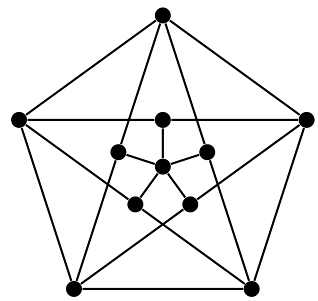
Exercice 5. On a montré en cours la chaîne d'inégalités $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. Trouvez des graphes correspondant aux situations suivantes :

1. $\omega(G) = \chi(G) = \Delta(G) + 1$
2. $\omega(G) = \chi(G) < \Delta(G) + 1$
3. $\omega(G) < \chi(G) = \Delta(G) + 1$
4. $\omega(G) < \chi(G) < \Delta(G) + 1$

Exercice 6. Montrez qu'un graphe G quelconque a au moins $\binom{\chi(G)}{2}$ arêtes.

Exercice 7. **Le graphe de Mycielski**

Soit G le graphe ci-dessous. Noter que G ne contient pas de K_3 comme sous-graphe.



Question 1. Trouver une coloration de G qui utilise 4 couleurs.

Question 2. Prouver qu'on ne peut pas colorier G avec 3 couleurs seulement (Indication : supposer qu'il existe une telle coloration et trouver une contradiction).

Question 3. En déduire le nombre chromatique de G.

Exercice 8. **Produits chimiques**

Huit lots de produits chimiques doivent être expédiés par avion depuis Saint-Denis (île de la Réunion) à la station scientifique de Port-aux-Français (îles Kerguélen). Pour des raisons de sécurité, certains de ces produits chimiques ne peuvent pas être transportés dans le même container. En effet, les produits interagissent entre eux et il est risqué de les stocker dans un même container si les lots ne sont pas parfaitement étanches. Les produits sont notés $P_1, \ldots, P_8$. La table ci-dessous liste les interactions entre les produits chimiques. Par exemple, le produit P_1 peut être placé dans le même container que les produits P_3, P_4, P_7 et P_8, mais ne peut pas être placé avec P_2, P_5 ou P_6.

$P_1 : P_2, P_5, P_6$	$P_2 : P_1, P_3, P_5, P_7$	$P_3 : P_2, P_4, P_7$
$P_4 : P_3, P_6, P_7, P_8$	$P_5 : P_1, P_2, P_6, P_7, P_8$	$P_6 : P_1, P_4, P_5, P_8$
$P_7 : P_2, P_3, P_4, P_5, P_8$	$P_8 : P_4, P_5, P_6, P_7$	

Le prix de l'envoi d'un container est de 3000 euros. On peut supposer qu'il n'y a pas de contrainte de capacité sur les containers (c.-à-d. un container peut contenir un nombre maximum de n lots, avec $n \geq 8$).

Question 1. Donner le prix minimum de l'envoi des huit lots de produits chimiques ainsi que la répartition des lots de produits chimiques dans les containers. Justifier soigneusement. (Indice : ne réinventez pas la roue !).

Exercice 9. **Régulation de la circulation (d'après Chartrand et Zhang)**

La figure ci-dessous représente les trajectoires de neuf voies $\{V_1, \ldots, V_9\}$ à un carrefour très fréquenté de Kuala Lumpur (Malaisie). Chaque voie est pourvue de ses propres feux de signalisation.

Les voitures d'une voie ne peuvent franchir le carrefour que lorsque leur feu est vert. La

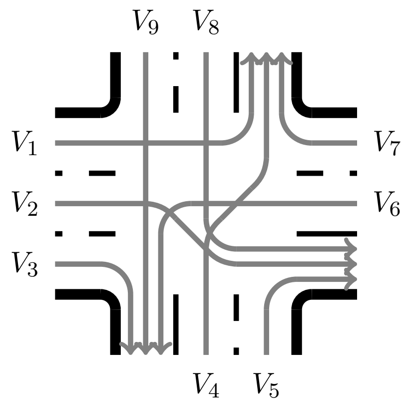


FIGURE 1 – Diagramme des neuf voies du carrefour. Le très grand nombre de véhicules empruntant ce carrefour (64 000 véhicules par jour en moyenne) conduit les autorités à réguler la circulation en phases, où à chaque phase les voies dont le feu est vert ne sont pas en conflit. Deux voies sont considérées en conflit si elles se croisent (par exemple V_1 et V_8) ou si elles ont la même destination (par exemple V_1 et V_7).

circulation est régulée par des cycles de 160 secondes, chaque cycle comportant 4 phases de durées 40 secondes comme suit :
Phase 1 : V_1, V_2 et V_3 sont au vert (les autres au rouge) ;
Phase 2 : V_4, V_5 et V_9 sont au vert (les autres au rouge) ;
Phase 3 : V_6 et V_7 sont au vert (les autres au rouge) ;
Phase 4 : V_8 est au vert (les autres au rouge).
Question 1. Le but est de minimiser le nombre de phases pour réguler le trafic. Modélisez la situation par un problème de graphe.

Question 2. Peut-on faire mieux que 4 phases pour réguler le trafic ?

Les voies V_2 et V_4 sont en fait très fréquentées, de sorte que les autorités souhaitent que V_2 et V_4 soient au vert deux fois par cycle et non plus une seule fois comme précédemment.

Question 3. Modifier le modèle pour prendre en compte cette contrainte ; donner un nouveau cycle ayant un nombre minimum de phases tel que V_2 et V_4 sont au vert deux fois dans le cycle. Justifier.

Exercice 10. Soit G un graphe dans lequel les cycles impairs s'intersectent deux à deux. Montrer que $\chi(G) \leq 5$ et donner un exemple qui montre que cette inégalité ne peut pas être améliorée.