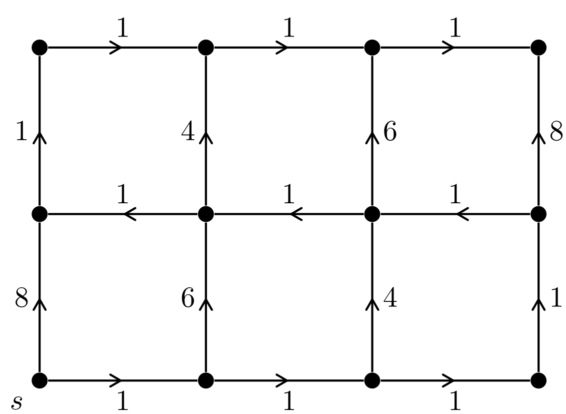
Plus court chemin, cycles eulériens et hamiltoniens

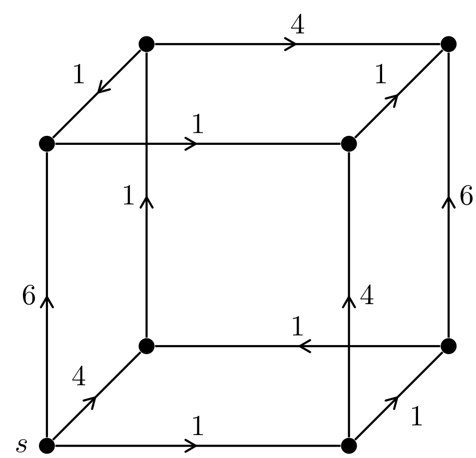
*INF303* *TD5*

# Plus court chemin

**Exercice 1. Entraînement avec Dijkstra**

Utiliser l'algorithme de Dijkstra pour déterminer la distance du sommet $s$ aux autres sommets dans les graphes orientés suivants.




**Exercice 2.**

Est-ce que l'algorithme de Dijkstra vu en cours trouve toujours les plus courts chemins si on autorise des arêtes de poids négatif ?

**Exercice 3. Le plus sûr chemin**

Plaçons-nous dans un réseau dans lequel on souhaite envoyer un message depuis une origine $s$ vers une destination $t$. Dans ce réseau, on estime qu'un message empruntant un arc $(i, j)$ a une probabilité $p_{i,j}$ de transiter correctement de $i$ vers $j$. Ainsi, un message qui transite de $s$ vers $j$ puis de $j$ vers $t$ a une probabilité $p_{s,j}p_{j,t}$ de transiter correctement. De même, si le message emprunte un chemin constitué des arcs $a_1, a_2, \ldots, a_k$, alors la probabilité qu'il transite correctement depuis l'origine jusqu'à la destination du chemin est $p_{a_1}p_{a_2}\cdots p_{a_k}$. Déterminer un chemin de $s$ à $t$ maximisant la probabilité que le message transite correctement est appelé le *problème du plus sûr chemin*.

*Question 1.* Donner une méthode permettant de trouver le plus sûr chemin de $s$ à $t$. Indices : on pourra essayer d'adapter l'algorithme de Dijkstra en utilisant les exercices précédents et le fait que pour tout $a, b > 0$ on a : $\log ab = \log a + \log b$.

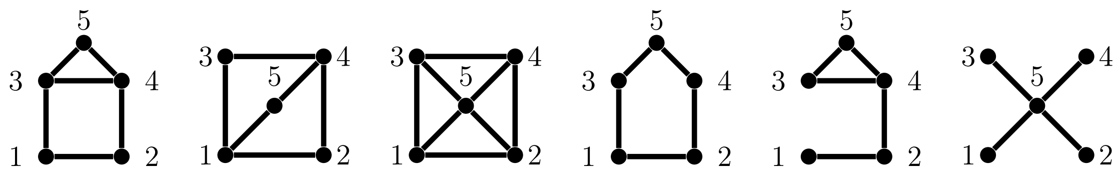
## Cycles eulériens et hamiltoniens

**Exercice 4**.

*Question 1.* Rappelez la définition de cycle eulérien, chaîne eulérienne, cycle hamiltonien, chaîne hamiltonienne.

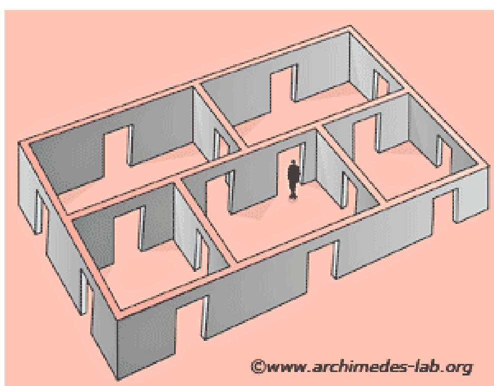
*Question 2.* Pour chacun des graphes suivants, répondez aux questions suivantes. Si vous répondez oui, donnez un exemple de chemin ou cycle. Si vous répondez non, justifiez pourquoi.

1. Le graphe possède-t-il une chaîne eulérienne ?
2. Le graphe possède-t-il un cycle eulérien ?
3. Le graphe possède-t-il une chaîne hamiltonienne ?
4. Le graphe possède-t-il un cycle hamiltonien ?



(a) (b) (c) (d) (e) (f)

**Exercice 5**. Est-il possible de faire un tour de la maison représentée sur la figure suivante en passant par chaque porte exactement une fois ?




**Exercice 6**. On dispose d'un fil de fer de 120 cm. Est-il possible de préparer une carcasse de cube de 10 cm d'arête sans couper le fil ? Sinon, combien de fois au minimum faut-il couper le fil de fer pour fabriquer cette carcasse ?

**Exercice 7**. On considère des dominos dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4 ou 5.

*Question 1.* En excluant les dominos doubles, de combien de dominos dispose-t-on ?

*Question 2.* Montrez que l'on peut arranger ces dominos de façon à former une boucle fermée (en utilisant la règle habituelle de contact entre les dominos).

*Question 3.* Pourquoi n'est-il pas nécessaire de considérer les dominos doubles ?

*Question 4.* Si l'on prend maintenant des dominos dont les faces sont numérotées de 1 à $n$, est-il possible de les arranger de façon à former une boucle fermée ?

**Exercice 8**.

On dispose de 15 perles numérotées de 1 à 15. On veut construire un collier qui respecte la curieuse règle suivante :

> *La somme des numéros de deux perles adjacentes sur le collier doit toujours être un carré parfait.*

On considérera que le collier est ouvert, c'est-à-dire que les deux perles situées aux deux extrémités du collier **ne sont pas adjacentes**. La somme de leurs numéros ne doit donc pas nécessairement être un carré parfait.

On rappelle que les carrés parfaits sont les nombres $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$

*Question 1.* Modéliser le problème à l'aide d'un graphe dont les sommets sont les perles.

*Question 2.* En déduire que l'on peut construire un collier qui respecte cette règle.

**Exercice 9**.

L'*hypercube* de dimension $n \geq 1$ est un graphe ayant pour sommets l'ensemble de tous les mots binaires de longueur $n$. Par exemple, $00, 01, 10, 11$ sont les 4 sommets de l'hypercube de dimension 2. Deux sommets sont liés par une arête si et seulement si les mots correspondants diffèrent en exactement une coordonnée (c'est-à-dire en un bit). Par exemple, il y a une arête entre 00 et 10, mais pas entre 00 et 11. L'hypercube de dimension $n$ est un graphe généralement noté $Q_n$.

*Question 1.* Démontrer que $Q_2$, $Q_3$, et $Q_4$ sont hamiltoniens.

Une construction récursive de $Q_n$ en fonction de $Q_{n-1}$ consiste à considérer deux copies de $Q_{n-1}$ que l'on connecte entre elles par un ensemble d'arêtes particulier, que l'on appelle un *couplage*.

*Question 2.* Expliciter cette construction pour $Q_3$ et $Q_4$. Donner la construction générale pour $n$ quelconque.

Cette vision des choses permet d'appliquer un principe de récurrence pour démontrer des propriétés intéressantes de l'hypercube.

*Question 3.* Démontrer que $Q_n$ est hamiltonien pour tout $n \geq 2$. On pourra faire une preuve par récurrence en utilisant la question précédente, qui donne à la fois le cas de base de la récurrence et le principe de décomposition permettant d'appliquer l'hypothèse de récurrence.