

## Enumération

**Exercice 1.** De combien de façons peuvent sept femmes danser avec sept hommes ?

**Exercice 2.** De combien de façons six enfants peuvent-ils s'asseoir sur une rangée de six chaises si trois d'entre eux refusent d'occuper les extrémités de la rangée ?

**Exercice 3.** De combien de façons différentes peut-on former la suite ordonnée VALET, DAME, ROI, AS si l'on veut que les cartes de cette suite soient

*Question 1.* de couleurs différentes ?

*Question 2.* de la même couleur ?

*Question 3.* de n'importe quelle couleur ?

(Aux cartes les couleurs sont : le Carreau  $\diamond$ , le Cœur  $\heartsuit$ , le Trèfle  $\clubsuit$  et le Pique  $\spadesuit$ .)

**Exercice 4.** Un coffre-fort possède cinq roulettes numérotées de 1 à 10. Un voleur tente d'ouvrir le coffre-fort et il ne connaît pas la combinaison.

*Question 1.* Combien existe-t-il de possibilités de combinaisons ?

Le voleur ne peut essayer que 100 combinaisons avant l'arrivée de la police.

*Question 2.* Quelle est la probabilité qu'il réussit à ouvrir le coffre-fort ?

**Exercice 5.** 24 pilotes participent à un Grand Prix de Formule 1, mais seuls les 10 premiers marquent des points pour le championnat. Supposons que tous les pilotes terminent la course.

*Question 1.* Combien de classements généraux possibles y a-t-il au total ?

*Question 2.* Combien de classements possibles y a-t-il pour les 10 premiers ?

**Exercice 6.** À partir d'un jeu ordinaire de 52 cartes, on compose une main de trois cartes. Combien existe-t-il de façons différentes de composer

*Question 1.* trois as ?

*Question 2.* trois coeurs ?

*Question 3.* trois cartes d'une même couleur ?

*Question 4.* une paire ? (deux cartes de même rang et une autre de rang différent)

*Question 5.* trois couleurs différentes ?

**Exercice 7.** On considère un ensemble fini.

Montrer, en utilisant la formule du binôme de Newton, qu'il a autant de parties paires que de parties impaires.

**Exercice 8.** Combien de nombres composés d'exactly trois chiffres et inférieurs à 500 peut-on former à l'aide des chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7 si les répétitions :

*Question 1.* sont permises ?

*Question 2.* ne sont pas permises ?

**Exercice 9.** Combien peut-on former de mots de 7 lettres avec les lettres du mot PLAFOND

*Question 1.* si une même lettre ne peut être employée qu'une seule fois ?

*Question 2.* si on tolère les répétitions d'une même lettre ?

**Exercice 10.** Combien peut-on former de mots avec les lettres du mot MISSISSIPPI (chacune de ses lettres doit être utilisée exactement une fois) ? Autrement dit, combien d'anagrammes ce mot a-t-il ?

**Exercice 11.** Soient  $k, n$  deux entiers.

Dénombrer les mots sur  $\{0, 1\}$  de longueur  $n$  qui ont exactement  $k$  uns.

## Principe des tiroirs

**Exercice 12.** On considère un carré de côté  $d$ . On y place cinq points.

Montrer qu'au moins deux points sont à distance inférieure ou égale à  $d$ .

**Exercice 13.** Dans un village de 400 habitants, y a-t-il deux personnes qui sont nées le même jour (pas forcément de la même année) ?

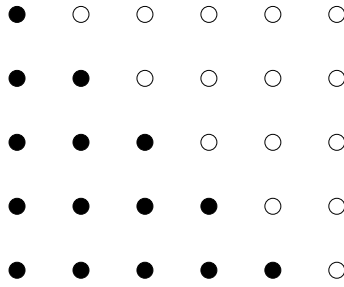
**Exercice 14.** \* On place les entiers de 1 à 10 sur un cercle.

Montrer qu'il existe au moins un triplet d'entiers consécutifs dont la somme est supérieure ou égale à 17.

## Double-comptage

**Exercice 15.** Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 0. En vous aidant de la figure ci-dessous, montrer que :

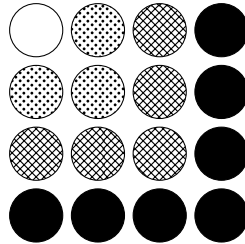
$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$



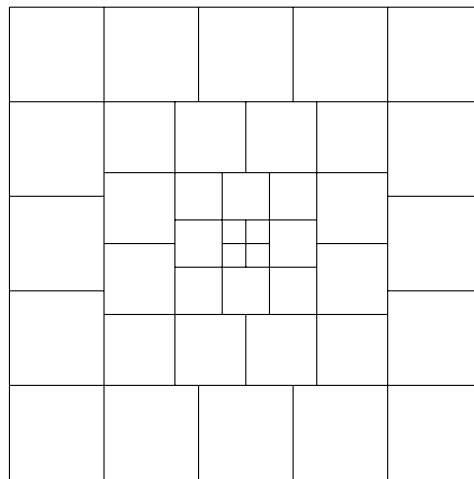
**Exercice 16.**

*Question 1.* Deviner une formule pour la somme des  $n$  premiers entiers impairs.

*Question 2.* Justifier votre formule en utilisant le diagramme ci-dessous.



**Exercice 17.** \* Le carré ci-dessous est formé par 4 couronnes  $C_k$  ( $k = 1, \dots, 4$ ), où  $C_k$  est elle-même constituée de  $4k$  carrés identiques de côté  $k$ .



*Question 1.* Pour un  $k$  fixé, quel est l'aire couverte par la  $k$ -ième couronne ?

*Question 2.* Utiliser la question précédente et le dessin pour déduire une formule pour la somme des  $n$  premiers cubes.