Notes de cours — INF303

1 *Énumération*

1.1 *Permutations et factorielle*

Définition 1.1. Une *permutation* de n objets distincts rangés dans un certain ordre, correspond à un changement de l'ordre de succession de ces n objets.

Définition 1.2. La *factorielle* d'un entier naturel n, notée $n!$, est le produit des nombres entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à n.

Il faut noter que $0! = 1$.

Proposition 1.3. *Le nombre de permutations de n objets est égal à $n!$.*

Démonstration. Il y a n choix pour le premier terme de la liste. Puis pour chacun de ces premiers choix, il y a $n-1$ possibilités pour le deuxième choix, $n-2$ pour le troisième, et ainsi de suite. Finalement il y a $n!$ choix possibles pour constituer une liste. $\square$

Exemple 1.4. Il y a $n!$ façons d'asseoir n personnes sur n chaises.

1.2 *Arrangements*

Définition 1.5. Un *k-arrangement* d'un ensemble est une liste ordonnée de cardinalité k.

Proposition 1.6. *Le nombre de k-arrangements d'un n-ensemble est $\frac{n!}{(n-k)!}$.*

Démonstration. Il y a n choix pour le premier terme de la liste. Puis pour chacun de ces premiers choix, il y a $n-1$ possibilités pour le deuxième choix, $n-2$ pour le troisième, et ainsi de suite. Finalement il y a $n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ choix possibles. $\square$

1.3 *Combinaisons et coefficients binomiaux*

Définition 1.7. Le *coefficient binomial* $\binom{n}{k}$, définit pour tout entier naturel n et tout entier naturel k inférieur ou égal à n, donne le nombre de sous-ensembles différents à k éléments que l'on peut former à partir d'un ensemble contenant n éléments.

Proposition 1.8. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Démonstration. Il y a $\frac{n!}{(n-k)!}$ k-arrangements par la proposition précédente. Chaque ensemble de k éléments peut être arrangé de $k!$ façons différentes. Autrement dit, en comptant tous les k-arrangements, chaque sous-ensemble de k éléments est compté $k!$ fois. Donc, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. $\square$

Proposition 1.9. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Démonstration. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k}$. □

Proposition 1.10 (Relation de Pascal)**.** $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Démonstration. $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k}\right) = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left(\frac{n}{k(n-k)}\right) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$. □

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

FIGURE 1: Les nombres dans le triangle de Pascal correspondent aux coefficients binomiaux.

Proposition 1.11. $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$.

Démonstration. La somme compte tous les ensembles d'un ensemble. Il y en a 2^n (voir exercice), ce qui prouve la proposition. (Un exemple de double comptage). □

1.4 *Identités remarquables*

$$
\begin{aligned}
(x+y)^0 &= 1 \\
(x+y)^1 &= x+y \\
(x+y)^2 &= x^2 + 2x + y^2 \\
(x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\
(x+y)^4 &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4x2y^3 + y^4
\end{aligned}
$$

Proposition 1.12 (La formule binôme de Newton)**.** $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$.

Démonstration. Si on écrit $(x+y)^n$ comme $(x+y)(x+y)\cdots(x+y)$, alors par distributivité il y aura un terme dans l'expansion pour chaque choix de x ou y de chaque binôme $(x+y)$ du produit. Par exemple, il y aura un seul terme x^n correspondant aux choix de x dans chaque binôme. En général, il y a $\binom{n}{i}$ façons d'obtenir $x^{n-i}y^i$, donc le coefficient de $x^{n-i}y^i$ est $\binom{n}{i}$. □

1.5 Mots (chaînes de caractères)

Définition 1.13. Un *mot* (ou *chaîne de caractères*) est une suite ordonnée de caractères.

Proposition 1.14. *Le nombre de mots de longueur n composés de k caractères est égal à k^n.*

Démonstration. Il y a k possibilités pour chaque lettre du mot, donc il y a k^n mots différents au total. □

Proposition 1.15. *Le nombre de mots de longueur n composés de k uns et $n-k$ zéros est $\binom{n}{k}$.*

Démonstration. Le nombre de permutations est $n!$. Pour chaque permutation, toutes les permutations des uns sont équivalentes (donnent le même mot). Pareil pour les zéros. Donc, le nombre de mots est $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$. □

1.6 Partitions des entiers

Proposition 1.16. *Le nombre de partitions de n en k parties est égal à $\binom{n-1}{k-1}$.*

Démonstration. Si on insère $k-1$ "," et $n-k$ "+" dans les $n-1$ caisses de $(1\square 1\square 1\square \ldots \square 1)$, cela donne une partition de n en k parties. Contrairement, chaque partition de n en k parties correspond à un choix de $k-1$ "+" et $n-k$ ",". Donc, il y a $\binom{n-1}{k-1}$ telles partitions. □

1.7 Principe des tiroirs

Proposition 1.17. *Si n chaussettes occupent m tiroirs, et si $n > m$, alors au moins un tiroir doit contenir strictement plus d'une chaussette.*

Exemple 1.18. Il doit y avoir au moins deux personnes à Grenoble avec le même nombre de cheveux sur leur tête.

Démonstration. Une tête normale a environ 150 000 cheveux et il est raisonnable de supposer que personne n'a plus de 400 000 de cheveux sur la tête. Il y a plus de 400 000 personnes dans l'agglomération de Grenoble. Si nous associons à chaque nombre de cheveux sur une tête un tiroir, et si nous plaçons chaque habitant de Grenoble dans le tiroir correspondant à son nombre de cheveux sur la tête, alors d'après le principe des tiroirs, il y a nécessairement au moins deux personnes ayant exactement le même nombre de cheveux sur la tête à Grenoble. □

Une version plus générale :

Proposition 1.19. *Si n chaussettes occupent m tiroirs, alors au moins un tiroir doit contenir au moins $\lceil \frac{n}{m} \rceil$ chaussettes, où $\lceil x \rceil$ denote l'entier immédiatement supérieur ou égal à x.*

Exemple 1.20. Dans une classe de n étudiants, il doit y avoir au moins $\lceil \frac{n}{12} \rceil$ étudiants qui partagent le mois de naissance.

1.8 Principe de double dénombrement

On compte la cardinalité d'un ensemble X de deux manières différentes. Cela fournit deux expressions différentes pour $|X|$. Donc, elles sont égales. On verra quelques exemples en TD.