

Les quarante-deux ans de la conjecture de Berge

Un graphe est parfait si et seulement si il ne contient pas de trou ni d'antitrou impairs**. Cette conjecture, appelée aussi « conjecture forte des graphes parfaits » a été considérée comme l'un des plus grands défis de la théorie des graphes. Elle a été énoncée en 1960 par Claude Berge, motivé entre autres par la théorie des jeux et par des problèmes de la théorie de l'information (surtout la capacité de Shannon). Au cours du temps, les graphes parfaits et les idées qu'ils ont stimulées ont pris de l'importance bien au-delà de la théorie des graphes : par exemple, dans la théorie de la combinatoire polyédrale, ou récemment dans l'application des méthodes de la programmation semi-définie en mathématiques discrètes, mais on trouve aussi des applications dans la conception de grands circuits intégrés.

Pendant près de quarante-deux ans, cette conjecture a retenu l'attention d'un grand nombre de chercheurs, dont celle de plusieurs équipes françaises ; des centaines d'articles lui ont été consacrés... Elle a passé sa première douzaine d'années en compagnie de sa sœur cadette, la conjecture faible, démontrée en 1972 par László Lovász.

En 1998, la conjecture est à nouveau projetée sur le devant de la scène : un colloque est organisé à Paris sur ce thème⁽⁹⁾ ; on apprend à peu près un an plus tard que le célèbre groupe formé autour de Paul Seymour de l'université de Princeton a décidé de considérer cette conjecture comme son nouveau terrain de chasse. Ces chercheurs sont connus pour leur excellence et leur persévérance dans la poursuite de longs projets.

La recherche a été encouragée par le support financier de l'American Institute for Mathematics, lui-même subventionné par la firme Fry Electronics. Si la somme allouée est comparable à celle offerte par la fondation Clay* pour la résolution d'un des sept problèmes ouverts, son mode d'attribution fut probablement plus constructif : Paul Seymour et ses collaborateurs ont été exonérés de tout enseignement, et leurs recherches étaient généreusement soutenues dans la première moitié de l'année 2001, et ce, indépendamment du résultat. Beaucoup de résultats importants utilisés dans la solution finale ont été démontrés par Vasek Chvatál et ses étudiants, ou encore par un autre groupe : Gérard Cornuéjols, Michele Conforti et leurs coauteurs.

Le 23 mai 2002, la naissance du théorème fort des graphes parfaits a été annoncée par Paul Seymour dans un colloque organisé au Tennessee par son collaborateur Robin Thomas (Georgia Tech, Atlanta). Les deux autres « chasseurs » qui ont participé à la résolution sont Neil Robertson (Ohio State University) et Maria Chudnovsky, une étudiante en thèse avec Seymour. Les auteurs estiment que la longueur de la démonstration va dépasser les 200 pages. Ils démontrent que les graphes de Berge se construisent en collant d'une manière « appropriée » des « graphes bipartis » (dans l'article : « à deux salles ») et d'autres graphes bien connus construits à l'aide de ces graphes. Leur méthode a de très bonnes chances d'aboutir aussi à un algorithme efficace (polynomial), mais cela demandera du travail supplémentaire. La date exacte de la naissance de cette conjecture est moins claire que la date de sa mort, ce qui est sûr c'est qu'elle a vécu une vie pleine et active pendant quarante-deux ans. Sa nouvelle vie comme théorème n'a peut-être pas fini de nous surprendre car elle pourrait conduire à d'autres démonstrations, applications ou algorithmes.